

Bernardo Marcolla

**Simulação Numérica da Dispersão de Poluentes  
em Atmosfera Neutra usando o Modelo de  
Turbulência k- $\epsilon$  Simplificado**

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Maio, 2021

Bernardo Marcolla

# **Simulação Numérica da Dispersão de Poluentes em Atmosfera Neutra usando o Modelo de Turbulência $k-\epsilon$ Simplificado**

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Bernardo Marcolla junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG  
Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF  
Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Prof. Dr. Darci Luiz Savicki

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil  
Maio, 2021

# Resumo

Neste trabalho apresenta-se um modelo matemático para a descrição do comportamento da camada limite atmosférica em condição estável. A turbulência é caracterizada utilizando-se o modelo  $k - \epsilon$  *simplificado*, proposto por (SAVICKI; GOULART; BECKER, 2021), que consiste em uma variação do modelo  $k - \epsilon$ . A fim de garantir que a camada limite seja horizontalmente homogênea, aplica-se condição de contorno periódica na entrada e na saída do escoamento, para as equações do modelo de turbulência. Além disso, a formulação da clássica lei da parede (*law of the wall*) para superfície rugosa foi utilizada para modelar a tensão de cisalhamento junto ao solo. A validação do modelo matemático é feita através da comparação da solução numérica da equação da concentração com valores experimentais extraídos do projeto Prairie Grass, obtendo-se excelente concordância.

**Palavras-chaves:** Modelagem da turbulência atmosférica, Modelo de turbulência  $k - \epsilon$  simplificado, Dispersão de poluentes.

# Abstract

This work presents a mathematical model to describe the behavior of the atmospheric boundary layer under stable conditions. Turbulence is characterized using the simplified  $k - \epsilon$  model, proposed by (SAVICKI; GOULART; BECKER, 2021). In order to ensure that the boundary layer is horizontally homogeneous, periodic boundary condition is applied at the inflow and outflow of the flow, for the equations of the turbulence model. In addition, the formulation of the law of the wall for rough surface was used to model the shear stress close to the ground. The validation of the mathematical model is done by comparing the numerical solution of the concentration equation with experimental values extracted from the Prairie Grass project, obtaining excellent agreement.

**Key-words:** Atmospheric turbulence modeling, Simplified  $k - \epsilon$  turbulence model, Dispersion of pollutants.

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	1
1.1	O experimento de Prairie Grass . . . . .	1
1.2	Modelagem da camada limite turbulenta horizontalmente homogênea	1
2	MODELO DE TURBULÊNCIA $k - \epsilon$ SIMPLIFICADO . . . . .	4
2.1	A equação para $k^*$ . . . . .	6
2.2	Ajuste da viscosidade da parede . . . . .	7
2.3	Consistência do modelo $k - \epsilon$ simplificado para a camada limite turbulenta horizontalmente homogênea . . . . .	8
3	MODELAGEM MATEMÁTICA DA DISPERSÃO DE POLUENTES	11
3.1	Equações de Navier-Stokes . . . . .	11
3.2	Equação da concentração . . . . .	11
3.3	Condições de contorno . . . . .	11
4	PREPARAÇÃO DOS DADOS . . . . .	13
4.1	Integração numérica . . . . .	13
5	SIMULAÇÃO NUMÉRICA DOS EXPERIMENTOS . . . . .	18
5.1	Campos de velocidade e concentração . . . . .	18
5.2	Perfil vertical de $k$ e $\epsilon$ . . . . .	19
5.3	Perfil vertical da viscosidade turbulenta . . . . .	20
5.4	Perfil vertical da velocidade na entrada e na saída . . . . .	22
5.5	Comparação entre a solução numérica e os dados experimentais para a concentração . . . . .	22
5.6	Fator de dois . . . . .	23
6	CONCLUSÕES . . . . .	28
	REFERÊNCIAS . . . . .	29

# 1 Introdução

Nesse trabalho será apresentado uma modelagem matemática para o escoamento em atmosfera neutra usando o modelo de turbulência  $k - \epsilon$  simplificado, proposto por (SAVICKI; GOULART; BECKER, 2021), tendo como referência o modelo proposto por (NORRIS; RICHARDS, 2010).

O objetivo dessa modelagem é compreender como acontece a dispersão de poluentes, em especial entender qual é o comportamento da viscosidade turbulenta, que é usada para calcular o coeficiente de difusão presente na equação da concentração (Eq. 3.4).

Para validação desse trabalho serão utilizados as medições de concentração do experimento de Prairie-Grass , (BARAD, 1958) ver exemplo na tabela 3, que aconteceu nos Estados Unidos (EUA), em 1956 em uma pradaria sem grandes obstáculos.

## 1.1 O experimento de Prairie Grass

O projeto Prairie Grass foi um experimento de dispersão realizado na camada limite atmosférica perto da cidade de O'Neill, Nebraska - Estados Unidos, no verão de 1956. Para cada teste, foi feita a liberação de  $SO_2$  durante 10 minutos e foram feitas amostradas em uma altura de 1,5 m em arcos distantes 50, 100, 200, 400 e 800 metros a partir da fonte. A descrição completa do projeto Prairie Grass pode ser encontrada em (BARAD, 1958). O esquema físico do experimento de Prairie Grass pode ser visto na Figura 1.

Conforme se observa, o dispositivo experimental permite realizar uma descarga controlada de  $SO_2$ , que ocorre em um ponto de descarga situado 0,5m acima do solo. A concentração do poluente é medida em arcos com raios de 50, 100, 200, 400 e 800 metros distantes da fonte de descarga, a uma altura de 1,5m. Os valores de concentração medidos ao longo do arco são integrados em um procedimento denominado *integração perpendicular ao vento* ("*cross wind integration*"). Este procedimento será detalhado na seção 4.1.

## 1.2 Modelagem da camada limite turbulenta horizontalmente homogênea

De acordo com (RICHARDS; HOXEY, 2010) a camada neutra da atmosfera em condição estável pode ser modelada como uma camada limite turbulenta horizontalmente homogênea (horizontally homogeneous turbulent boundary layer - HHTBL). Usando o

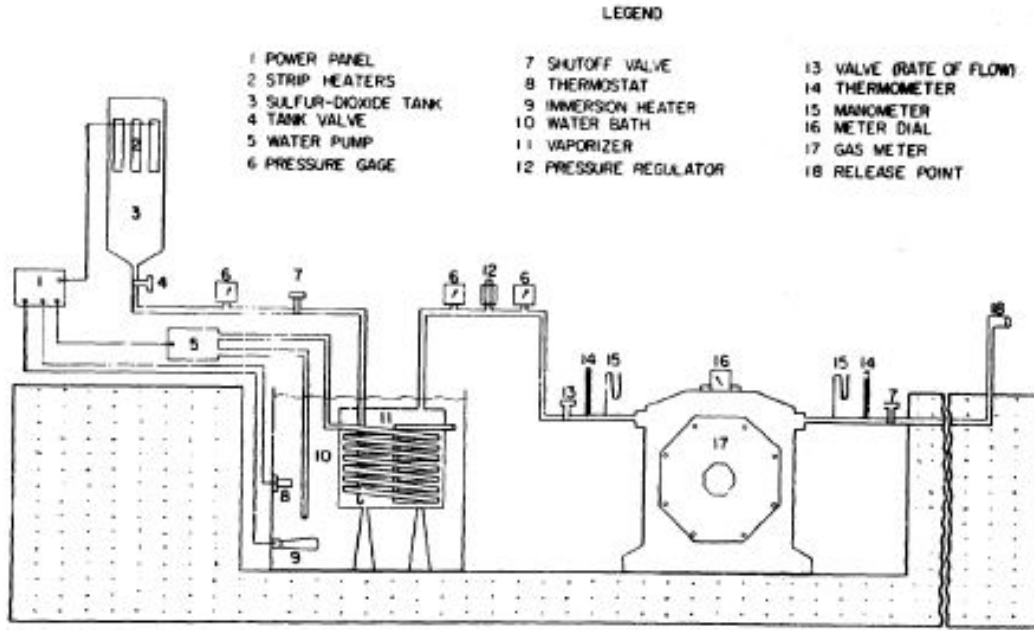


Figura 1 – Esquema físico do experimento Prairie Grass. (Fonte: (BARAD, 1958))

modelo de turbulência k- $\epsilon$  padrão, esta camada pode ser modelada pelo seguinte conjunto de equações.

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z + z_0}{z_0} \quad (1.1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P_k - \rho \epsilon \quad (1.2)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right) + [c_{\epsilon 1} P_k - c_{\epsilon 2} \rho \epsilon] \frac{\epsilon}{k} \quad (1.3)$$

Onde  $P_k$  é o termo de produção de energia cinética, definido como

$$P_k = \mu_t \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \quad (1.4)$$

e  $u_*$ , presente na Eq. 1.1 é a velocidade de fricção, definida como:

$$u_* = \frac{\kappa u_r}{\ln \left( \frac{h_r + z_0}{z_0} \right)} \quad (1.5)$$

que é calculada a partir do valor da velocidade de referencia  $u_r$ , determinada na altura de referencia  $h_r$ . A rugosidade do solo é representada por  $z_0$ : A solução exata (analítica) das Eq. 1.2 e 1.3 é:

$$k = \frac{u_*^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (1.6)$$

$$\epsilon = \frac{u_*^3}{\kappa(z + z_0)} \quad (1.7)$$

No modelo  $k - \epsilon$  padrão, a viscosidade turbulenta  $\mu_t$  é expressa como:

$$\mu_t = \rho c_u \frac{k^2}{\epsilon} \quad (1.8)$$

Usando as equações 1.6 e 1.7, a Eq. 1.8 pode ser expressa como

$$\mu_t = \rho u_* \kappa (z + z_0) = \rho \kappa c_\mu^{\frac{1}{4}} k^{\frac{1}{2}} (z + z_0) \quad (1.9)$$

É fácil de ver que as equações 1.6, 1.7 e 1.9 satisfazem a Eq. 1.2. Por outro lado, para que a solução 1.6, 1.7 e 1.9 satisfaça a Eq. 1.3, as constantes devem obedecer a seguinte relação

$$\kappa = \sqrt{(c_{\epsilon 2} - c_{\epsilon 1}) \sigma \sqrt{c_\mu}} \quad (1.10)$$

Para o modelo  $k - \epsilon$  padrão, usualmente adota-se  $c_{\epsilon 1} = 1.44$ ,  $c_{\epsilon 2} = 1.92$ ,  $\sigma_\epsilon = 1.3$ ,  $c_\mu = 0.09$ , o que resulta em  $\kappa \approx 0.432$ , no qual é próximo do valor usual da constante de von Kármán ( $\kappa = 0.41$ ).

Para esse modelo, a mesma solução pode ser encontrada se a viscosidade turbulenta for expressa por uma função linear em relação a variável  $k$  na forma:

$$\mu_t = \rho c_\mu k^* \frac{k}{\epsilon} \quad (1.11)$$

onde  $k^* = k = \frac{u_*^2}{\sqrt{c_\mu}}$ .

O modelo  $k - \epsilon$  simplificado que será apresentado a seguir, usa uma equação ainda mais simples para representar a viscosidade turbulenta, a saber

$$\mu_t = \rho k^* \frac{k}{\epsilon} \quad (1.12)$$



## 2 Modelo de Turbulência $k - \epsilon$ Simplificado

A dedução das equações do modelo  $k - \epsilon$  *simplificado* é apresentada em (SAVICKI; GOULART; BECKER, 2021). Para fins de melhorar o entendimento, neste trabalho iremos apresentar de maneira sintética a obtenção as equações deste modelo.

Para deduzir as equações do modelo  $k - \epsilon$  *simplificado*, partimos das equações do modelo  $k - \epsilon$  padrão, cuja dedução pode ser encontrada em (CELIK, 1999). Depois de extensas manipulações algébricas, a equação para a dissipação da energia cinética ( $\epsilon$ ) é escrita como

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + P_\epsilon + D_\epsilon \quad (2.1)$$

O primeiro termo no lado direito da Eq. 2.1 do modelo o transporte de  $\epsilon$  devido a dissipação viscosa. O segundo termo ( $P_\epsilon$ ) modela a produção de  $\epsilon$  e o último termo ( $D_\epsilon$ ) corresponde a taxa de destruição de  $\epsilon$ .

O termo  $P_\epsilon$  é modelado considerando a hipótese de equilíbrio local, que supõe que a taxa de dissipação de energia cinética é proporcional a taxa de produção de energia cinética, ou seja  $\epsilon \approx P_k$ . Assim, o termo de produção de dissipação ( $P_\epsilon$ ) pode ser modelado em função do termo  $P_k$  e do tempo característico  $t_{ch}$ , ou seja

$$P_\epsilon \propto \frac{P_k}{t_{ch}} \quad (2.2)$$

No modelo  $k - \epsilon$  simplificado, o tempo característico é definido como

$$t_{ch} = \frac{k^\star}{\epsilon} \quad (2.3)$$

Deste modo, a Eq. 2.2 é expressa como

$$P_\epsilon \propto P_k \frac{\epsilon}{k^\star} \quad (2.4)$$

Mais adiante iremos dar uma interpretação física para a constante  $k^\star$ . De maneira similar, o termo  $D_\epsilon$ , correspondente a taxa de dissipação de  $\epsilon$  no tempo, pode ser expresso como

$$D_\epsilon \propto \frac{\epsilon}{t_{ch}} \quad (2.5)$$

Usando novamente a definição de  $t_{ch}$  (Eq. 2.3), obtemos

$$D_\epsilon \propto \epsilon \frac{\epsilon}{k^\star} \quad (2.6)$$

Substituindo  $P_\epsilon$  e  $D_\epsilon$  pelas Eq. 2.4 e 2.6 na Eq. 2.1, obtemos

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) + c_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k^\star} - c_{\epsilon 2} \epsilon \frac{\epsilon}{k^\star} \quad (2.7)$$

A equação 2.7 é a equação para  $\epsilon$  do modelo  $k - \epsilon$  simplificado.

Além disso, definindo o comprimento característico ( $l_{ch}$ ) como

$$l_{ch} = k^{\frac{1}{2}} \frac{k^\star}{\epsilon} \quad (2.8)$$

podemos expressar a viscosidade turbulenta como

$$\mu_t = \rho k^{\frac{1}{2}} l_{ch} = \rho k^{\frac{1}{2}} \left( k^{\frac{1}{2}} \frac{k^\star}{\epsilon} \right) = \rho k^\star \frac{k}{\epsilon} \quad (2.9)$$

que está de acordo com a definição mostrada na eq. 1.12.

Por sua vez, a equação para a produção de energia cinética turbulência ( $k$ ) no modelo  $k - \epsilon$  padrão (ver (CELIK, 1999)) é

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + P_k - \rho \epsilon_s \quad (2.10)$$

Para esta equação, apenas no termo  $-\rho \epsilon_s$  do modelo  $k - \epsilon$  padrão sofre alteração em decorrência das definições feitas no modelo  $k - \epsilon$  simplificado. Para mostrar isso, nós usaremos o índice "s" para enfatizar o modelo padrão (*standard*). Tradicionalmente, a variável  $\epsilon_s$  é modelada como

$$\epsilon_s = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_{ch}} \quad (2.11)$$

Agora, usando a definição para o comprimento característico do modelo  $k - \epsilon$  simplificado ( $l_{ch} = \frac{k^{\frac{1}{2}} k^\star}{\epsilon}$ ) podemos ver que

$$\epsilon_s = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_{ch}} = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{\frac{k^{\frac{1}{2}} k^\star}{\epsilon}} = \epsilon \frac{k}{k^\star} \quad (2.12)$$

Então, para o modelo  $k - \epsilon$  simplificado, o termo  $-\rho \epsilon_s$  deve ser substituído por  $-\rho \epsilon \left( \frac{k}{k^\star} \right)$ . Para deixar mais claro, apresentamos as equações para  $k$  e  $\epsilon$  do modelo  $k - \epsilon$  simplificado em duas dimensões

$$\frac{\partial(\rho u k)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w k)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial z} \right] + P_k + G_k - \rho \epsilon \left( \frac{k}{k^\star} \right) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial(\rho u \epsilon)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w \epsilon)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \right] + c_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k^\star} - c_{\epsilon 2} \epsilon \frac{\epsilon}{k^\star} \quad (2.14)$$

sendo a viscosidade turbulenta calculada é com uso da Eq. 1.12.

Para dar um significado físico para  $k^*$ , vamos considerar seu valor para a atmosfera neutra, ou seja,

$$k^* = u_\star^2 \quad (2.15)$$

A partir da definição de velocidade de atrito ( $u_\star$ ), temos

$$u_\star = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (2.16)$$

Então,  $k^*$  pode ser visto como

$$k^* = u_\star^2 = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (2.17)$$

Na subcamada inercial, os redemoinhos podem ser considerados isotrópicos, não tendo mais a memória da forma dos grandes redemoinhos altamente anisotrópicos das camadas mais altas. Assim, a presença de  $k^*$  nas equações do modelo  $k - \epsilon$  bem como na equação da viscosidade turbulenta representa a influência da tensão de cisalhamento da parede ( $\tau_0$ ) sobre o escoamento.

## 2.1 A equação para $k^*$

O principal parâmetro do modelo  $k - \epsilon$  simplificado é  $k^*$ . Para escoamentos atmosféricos dominados por forças advectivas, tal qual a camada limite turbulenta horizontalmente homogênea, foi visto que

$$k^* = u_\star^2 \quad (2.18)$$

Por outro lado, pode ser verificado que  $k^*$  pode ser relacionada a bem conhecida equação para a condição de contorno de entrada para o modelo  $k - \epsilon$ , a saber

$$k^* = \frac{3}{2}(Iu_{ref})^2 \quad (2.19)$$

onde  $I$  é a intensidade de turbulência e  $u_{ref}$  é a velocidade de referência.

Para a velocidade de referência tomada na altura  $z = 10m$ , (SAVICKI; GOUTART; BECKER, 2021) mostraram que pode ser tomado  $I = 0,04$ . No entanto, para escoamentos confinados (escoamento em dutos, escoamento entre placas, etc), a velocidade de referência é a velocidade média. Para estes casos, a intensidade de referência pode assumir um valor bem maior ( $I = 0.1$  ou  $I = 0.2$  por exemplo).

## 2.2 Ajuste da viscosidade da parede

Para uma superfície lisa (sem rugosidade), a lei da parede é definida como

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln z^+ + B \quad (2.20)$$

onde  $B$  é uma constante. Seguindo a formulação padrão,  $B = 5.6$ . A velocidade adimensional  $u^+$  e a posição adimensional  $z^+$  são definidas como

$$z^+ = \frac{\rho z_p u_\tau}{\mu} \quad (2.21)$$

$$u^+ = \frac{u_p}{u_\tau} \quad (2.22)$$

onde  $u_p$  é a velocidade  $u$  na posição  $y_p$  (o índice  $p$  indica o primeiro ponto interno, na direção vertical) e  $u_\tau$  é a chamada velocidade de fricção, definida por

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (2.23)$$

Para o caso de escoamento em atmosfera estável, como base na discussão anterior (ver equação 2.16), foi utilizado  $u_\tau = u_\star$ .

Além disso, para uma superfície rugosa, seguindo (SCHINDLER; ACKERMAN, 2010), a lei da parede padrão é modificada com a inclusão de um termo extra  $\Delta u^+$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(z^+) + B - \Delta u^+ \quad (2.24)$$

onde o termo  $\Delta u^+$  é calculado por

$$\Delta u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Re_\star) + B - 8.5 \quad (2.25)$$

sendo

$$Re_\star = \frac{u_\star k_s}{\nu} = \frac{\rho u_\star k_s}{\mu} \quad (2.26)$$

onde  $k_s$  é a rugosidade da superfície (*roughness surface*).

Da clássica formulação da lei da parede se conclui que a tensão de cisalhamento na parede pode ser expressa como

$$\tau_w = \mu_t \frac{u_p}{z_p} = \mu \frac{z^+}{\frac{1}{\kappa} \ln(E z^+)} \frac{u_p}{z_p} = \mu \frac{z^+}{u^+} \frac{u_p}{z_p} \quad (2.27)$$

Da equação acima, percebe-se que a viscosidade turbulenta junto a parede é

$$\mu_t = \mu \frac{z^+}{u^+} \quad (2.28)$$

A única diferença em relação ao desenvolvimento padrão para o caso de parede lisa (sem rugosidade) está no calculo de  $u^+$ , que agora é calculado pela Eq. 2.24.

Para o experimento de Prairie-Grass, a rugosidade da superfície foi estimada como sendo  $z_0 = k_s = 0,006m$ . No entanto, neste trabalho, para garantir que o valor da velocidade no primeiro ponto acima do solo sejam iguais na entrada e na saída, o valor de  $k_s$  presente em  $Re_\star$  foi multiplicado por um fator  $f_\mu$ , ou seja

$$Re_\star = \frac{\rho u_\star (\mathbf{f}_\mu \mathbf{k}_s)}{\mu} \quad (2.29)$$

onde  $f_\mu$ , a variável  $f_\mu$  e  $k_s$  elas foram colocadas em negrito para destacar sua importância, é atualizado segundo o seguinte processo iterativo, que objetiva forçar que a velocidade de saída seja igual a velocidade de entrada no primeiro ponto interno (em  $z_2$ )

$$f_{\mu,new} = \begin{cases} 1.01 \cdot f_{\mu,old} & \text{if } u(z_2)_{out} > 1.1 \cdot u(z_2)_{in} \\ 0.99 \cdot f_{\mu,old} & \text{if } u(z_2)_{out} < 0.9 \cdot u(z_2)_{in} \end{cases} \quad (2.30)$$

Para todos os 13 experimentos testados, o valor  $f_\mu$  ajustado variou no intervalo entre 16 e 18, ficando aproximadamente centrado em no valor de 17, conforme se pode observar na figura 2. Ou seja:

$$16 \leq f_\mu \leq 18 \rightarrow f_\mu \approx 17 \quad (2.31)$$

Portanto, para satisfazer que a velocidade de saída seja coincidente com o perfil de entrada, fornecido pela Eq. 1.1, obtivemos que o valor de  $k_s$  deve ser aproximadamente 17 vezes maior que o valor de  $z_0$ , ou seja,  $k_s = 17(z_0) = 17(0,006) = 0,0102$ .

## 2.3 Consistência do modelo $k-\epsilon$ simplificado para a camada limite turbulenta horizontalmente homogênea

Para a camada limite turbulenta horizontalmente homogênea, o modelo  $k-\epsilon$  simplificado toma a forma

$$0 = \frac{d}{dz} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{dk}{dz} \right) + \mu_t \left( \frac{du}{dz} \right)^2 - \rho \epsilon \frac{k}{k^\star} \quad (2.32)$$

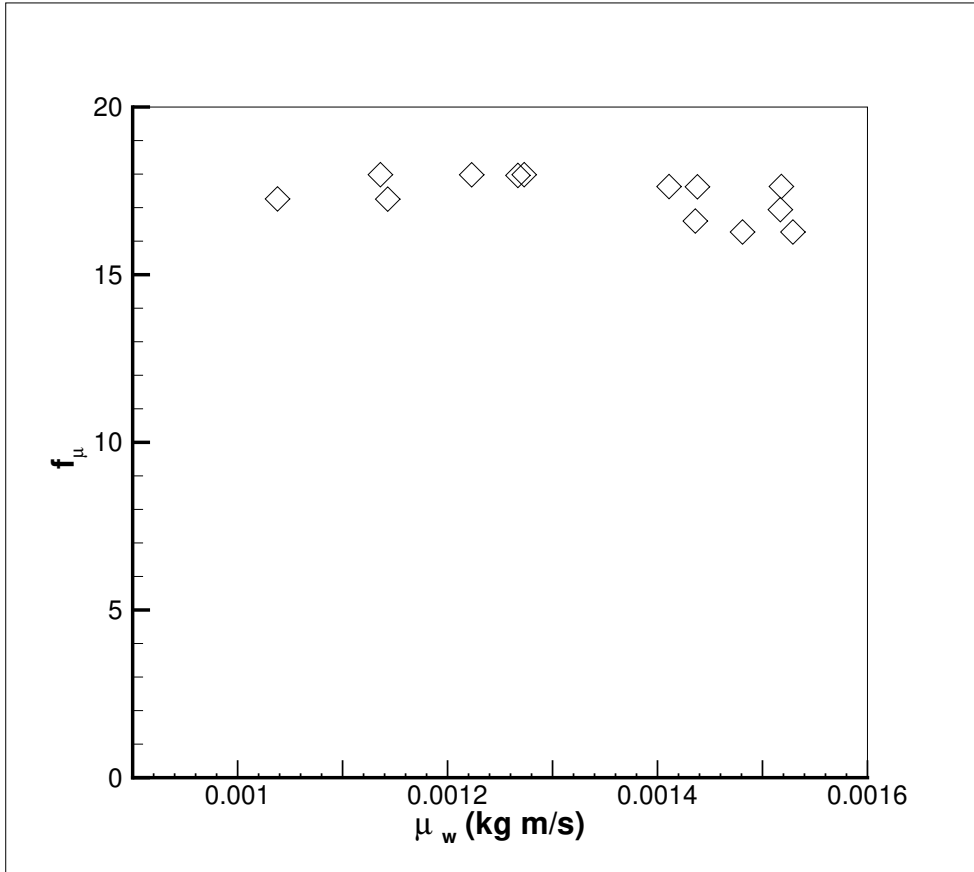


Figura 2 – Valores ajustados para o fator  $f_\mu$ , plotados em função do valor  $\mu_w$  ajustado.

$$0 = \frac{d}{dz} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{d\epsilon}{dz} \right) + c_{\epsilon 1} \mu_t \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \frac{\epsilon}{k^\star} - \rho c_{\epsilon 2} \epsilon \frac{\epsilon}{k^\star} \quad (2.33)$$

A solução analítica para este modelo é

$$u = \frac{u_\star}{\kappa} \ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right) \quad (2.34)$$

$$k = u_\star^2 \quad (2.35)$$

$$\epsilon = \frac{u_\star^3}{\kappa(z + z_0)} \quad (2.36)$$

sendo

$$\mu_t = \rho k^\star \frac{k}{\epsilon} = \rho \kappa u_\star (z + z_0) \quad (2.37)$$

$$k^\star = u_\star^2 \quad (2.38)$$

Observe que  $\frac{du}{dz} = \frac{u_\star}{\kappa z'}$ . Aqui, por simplicidade, denotaremos  $z' = z + z_0$ .

Vemos que a Eq. (2.32) é imediatamente satisfeita, visto que

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} 0 \right) + \rho \kappa u_* z' \left( \frac{u_*}{\kappa z'} \right)^2 - \rho \frac{u_*^3}{\kappa z'} \frac{u_*^2}{u_*^2} \rightarrow 0 = 0 \quad (2.39)$$

Por outro lado, para a equação para  $\epsilon$ , Eq. (2.33), nós temos

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\rho u_* \kappa z'}{\sigma_\epsilon} \frac{d \left( \frac{u_*^3}{\kappa z'} \right)}{dz} \right) + c_{\epsilon 1} \rho \kappa u_* z' \left( \frac{u_*}{\kappa z'} \right)^2 \frac{u_*^3}{\kappa z'} \frac{1}{u_*^2} - c_{\epsilon 2} \rho \frac{u_*^3}{\kappa z'} \frac{u_*^3}{\kappa z'} \frac{1}{u_*^2} = 0 \quad (2.40)$$

Após alguma manipulação algébrica, obtemos

$$\frac{1}{\sigma_\epsilon} + \frac{c_{\epsilon 1}}{\kappa^2} - \frac{c_{\epsilon 2}}{\kappa^2} = 0 \quad (2.41)$$

Visto que temos uma equação e várias variáveis, esta equação admite infinitas soluções. Por exemplo, usando  $\sigma_\epsilon = 1.00$ ,  $c_{\epsilon 1} = 1.00 - \Delta$ ,  $c_{\epsilon 2} = 1.00 + \Delta$ ,  $\kappa = 0.40$  encontramos  $\Delta = 0.08$ , tal que,  $c_{\epsilon 1} = 0.92$ ,  $c_{\epsilon 2} = 1.08$ . Se escolhermos  $c_{\epsilon 1} = 1.00$ , então  $c_{\epsilon 2} = 1.16$ . E se escolhermos  $c_{\epsilon 2} = 1.00$ , então  $c_{\epsilon 1} = 0.84$ . Em (SAVICKI; GOULART; BECKER, 2021), usando o argumento da simetria, os autores sugerem que seja adotado a solução  $c_{\epsilon 1} = 0.92$ ,  $c_{\epsilon 2} = 1.08$  para este modelo.

# 3 Modelagem Matemática da Dispersão de Poluentes

Nesta seção apresentamos as equações que definem o modelo matemático utilizado para modelar a o problema da dispersão de poluentes na atmosfera.

## 3.1 Equações de Navier-Stokes

O escoamento é definido pelas equações de continuidade e de conservação do momento, nas direções longitudinal (x) e vertical (z), que podem ser vistas com mais detalhes em (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho wu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (3.3)$$

Adicionalmente, a modelagem da turbulência é feita utilizando o modelo  $k-\epsilon$  simplificado, composto pelas equações 2.13, 2.14 e 1.12.

## 3.2 Equação da concentração

A modelagem da dispersão de poluentes é feita usando a equação da concentração, que pode ser vista com mais detalhes em (PATANKAR, 1980).

$$\frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial(wC)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\mu_t}{\rho S_{ct}} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\mu_t}{\rho S_{ct}} \right) \frac{\partial C}{\partial z} \right] \quad (3.4)$$

onde  $S_{ct}$  é o número de Schmidt turbulento. Em geral, o número de Schmidt é tomado entre 0.5 e 1.5. Neste trabalho foi utilizado  $S_{ct} = 1.0$

## 3.3 Condições de contorno

A tabela 1 apresenta as condições de contorno para a velocidade,  $k$ ,  $\epsilon$  e concentração.



Tabela 1 – condições de contorno para  $u$ ,  $w$ ,  $C$ ,  $k$  e  $\epsilon$ .

	$u$	$w$	$C$	$k$	$\epsilon$
Entrada	$u = \frac{u^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right)$	$w = 0$	$C = \begin{cases} 0, & \text{if } z \neq z_s \\ \rho_{SO_2}, & \text{if } z = z_s \end{cases}$	periodica	periodica
Saída	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$w = 0$	$\frac{\partial C}{\partial x} = 0$	periódica	periódica
Solo	$u = 0$	$w = 0$	$\frac{\partial C}{\partial z} = 0$	$k = k^*$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0$
Topo	$u = \frac{u^*}{\kappa} \ln\left(\frac{z_i+z_0}{z_0}\right)$	$w = 0$	$\frac{\partial C}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial k}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = 0$

## 4 Preparação dos Dados

A tabela 2 apresenta os dados dos principais parâmetros utilizados na simulação numérica dos experimentos. Os valores de  $u$  (velocidade do vento a 10m de altura),  $h$  (altura da camada limite),  $Q$  (vazão mássica de descarga do poluente),  $u_*$  (velocidade de fricção) e  $L$  (comprimento de Monin-Obukhov) foram extraídos de (MOREIRA, 2007). Já os valores integrados de concentração  $C_{50m}$ ,  $C_{100m}$ ,  $C_{200m}$ ,  $C_{400m}$  e  $C_{800m}$  for obtidos pelo autor via integração numérica, a partir dos dados experimentais extraídos de (BARAD, 1958).

Tabela 2 – Parâmetros relacionados aos experimentos Prairie Grass de atmosfera neutra.  $Q$  ( $g/s$ ) é a taxa de emissão e  $C$  ( $g/m^2$ ) são as concentrações integradas na direção perpendicular ao vento.

Exp.	$u(m/s)$	$h(m)$	$Q(g/s)$	$u_*(m)$	$L(m)$	$C_{50m}$	$C_{100m}$	$C_{200m}$	$C_{400m}$	$C_{800m}$
17	3.3	131	56.5	0.21	48	6.20	3.82	2.07	1.08	0.62
21	6.1	333	50.9	0.38	172	2.99	1.87	1.01	0.53	0.28
22	6.4	400	48.4	0.46	204	2.30	1.33	0.72	0.36	0.16
23	5.9	358	40.9	0.39	193	2.02	1.25	0.71	0.32	0.17
24	6.2	400	41.2	0.38	248	2.03	1.18	0.66	0.36	0.17
29	3.5	119	41.5	0.23	36	4.22	2.72	1.60	0.93	0.50
37	4.6	216	40.3	0.29	95	2.46	1.57	0.86	0.47	0.27
38	4.1	217	45.4	0.28	99	3.55	2.15	1.17	0.64	0.36
42	5.8	275	56.4	0.37	120	3.00	1.77	0.99	0.51	0.29
54	4	128	43.4	0.24	40	3.57	2.27	1.34	0.78	0.46
55	5.4	279	45.3	0.24	124	2.51	1.49	0.83	0.38	0.21
56	4.5	194	45.9	0.29	76	3.26	1.98	1.08	0.58	0.33
60	4.9	166	38.5	0.28	11	2.57	1.66	0.96	0.49	0.29

### 4.1 Integração numérica

Nesse trabalho foi utilizado o método dos trapézios para a integração das concentrações na direção perpendicular a direção do vento. Os dados foram extraídos de (BARAD, 1958). A Figura 3 apresenta, a título de exemplo, a forma como os dados de concentração são fornecidos em função do ângulo ao longo do arco. Pode se observar que para os arcos de 50, 100, 200 e 400m as concentrações foram medidas com intervalo de 2 graus, e no arco de raio 800 m, o intervalo entre as medições é de 1 grau.

A justificativa para fazer a integração das concentrações na direção perpendicular ao vento é condessar a medição experimental (tridimensional) para o plano bidimensional,

DATE 23 July 1956  
TIME 2000-2010 CST

Table 5.2 (Continued)

CONCENTRATION (mg m<sup>-3</sup>)

RUN NO.17

POST NO.		ARC					POST NO.		ARC				
Inner Arcs	800m arc	50m	100m	200m	400m	800m	Inner Arcs	800m arc	50m	100m	200m	400m	800m
1	1							46					
	2						24	47					
2	3							48					
	4						25	49					
3	5							50					
	6						26	51					
4	7							52					
	8						27	53					
5	9							54					
	10						28	55					
6	11							56					
	12						29	57					
7	13							58					
	14						30	59					
8	15							60					
	16						31	61					
9	17							62					
	18						32	63					
10	19							64					
	20						33	65					
11	21							66					
	22						34	67					
12	23							68					
	24						35	69					
13	25							70					
	26						36	71					
14	27							72					
	28						37	73	0.180				
15	29							74					
	30						38	75	1.40	0.030			
16	31							76					
	32						39	77	20.1	0.345			
17	33							78					
	34						40	79	54.3	2.98	0.110	0.025	
13	35							80					
	36						41	81	152	20.1	1.84	0.150	
19	37							82					0.085
	38						42	83	302	76.2	13.4	2.03	0.435
20	39							84					1.86
	40						43	85	518	177	46.8	13.1	4.94
21	41							86					3.02
	42						44	87	623	269	83.2	26.9	9.74
22	43							88					9.04
	44						45	89	645	254	86.2	25.7	8.28
23	45							90					2.98

Table 5.2 (Continued)

DATE 23 July 1956  
TIME 2000 - 2010 CST  
CONCENTRATION (mg m<sup>-3</sup>)  
RUN NO.17

POST NO.	ARC					POST NO.	ARC							
	Inner Arcs	800m arc	50m	100m	200m		400m	800m	Inner Arcs	800m arc	50m	100m	200m	400m
46	91	561	164	46.0	8.63	0.755		136						
47	92					0.285		93	562					
48	93	330	90.6	14.4	1.11	0.032		137						
49	94							138						
50	95	185	33.3	2.70				139						
51	96							140						
52	97	108	8.93	0.245				141						
53	98							142						
54	99	29.4	1.00					143						
55	100							144						
56	101	8.73	0.090					145						
57	102							146						
58	103	1.19						147						
59	104							148						
60	105	0.235						149						
61	106							150						
62	107							151						
63	108							152						
64	109							153						
65	110							154						
66	111							155						
67	112							156						
68	113							157						
69	114							158						
70	115							159						
71	116							160						
72	117							161						
73	118							162						
74	119							163						
75	120							164						
76	121							165						
77	122							166						
78	123							167						
79	124							168						
80	125							169						
81	126							170						
82	127							171						
83	128							172						
84	129							173						
85	130							174						
86	131							175						
87	132							176						
88	133							177						
89	134							178						
90	135							179						
91	136							180						
92	137							181						

Figura 3 – Imagem da tabela obtida no Experimento de Prairie Grass

de modo que se possa comparar estes valores integrados (1D) com a solução numérica bidimensional fixando  $y = 1.5m$ .

Para fazer essa integração numérica é feita uma projeção sobre o plano  $y$ , considerando que os dados experimentais se referem as direções  $x$  (longitudinal, em relação a direção do vento),  $z$  (vertical) e  $y$  (transversal, em relação a direção do vento), como mostrado na imagem 4.

Na Figura 4, o ângulo  $\theta_r$  corresponde a direção do vento. Esse ângulo é definido como o ângulo médio da entre os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_n$ , onde  $\theta_1$  é o primeiro ângulo onde o poluente é detectado e o  $\theta_n$  é o último ângulo onde o poluente é detectado. A integração numérica é feita numa direção perpendicular a direção dada pelo ângulo  $\theta_r$ . Obviamente, a direção  $\theta_r$  pode variar de um experimento para outro, haja visto que a direção do vento pode mudar de um dia para outro.

Para cada ângulo  $\theta_i$ , a projeção do raio ( $R=50, 100, 200, 400, 800$ ) sobre o eixo perpendicular à direção  $\theta_r$  é dada pela Eq. 4.1

$$y_i = R \sin(\theta_i - \theta_r) \quad (4.1)$$

Para cada projeção  $y_i$  sobre o eixo transversal  $y$  corresponde uma concentração  $C_i$ , o que dá origem a seguinte tabela de pontos

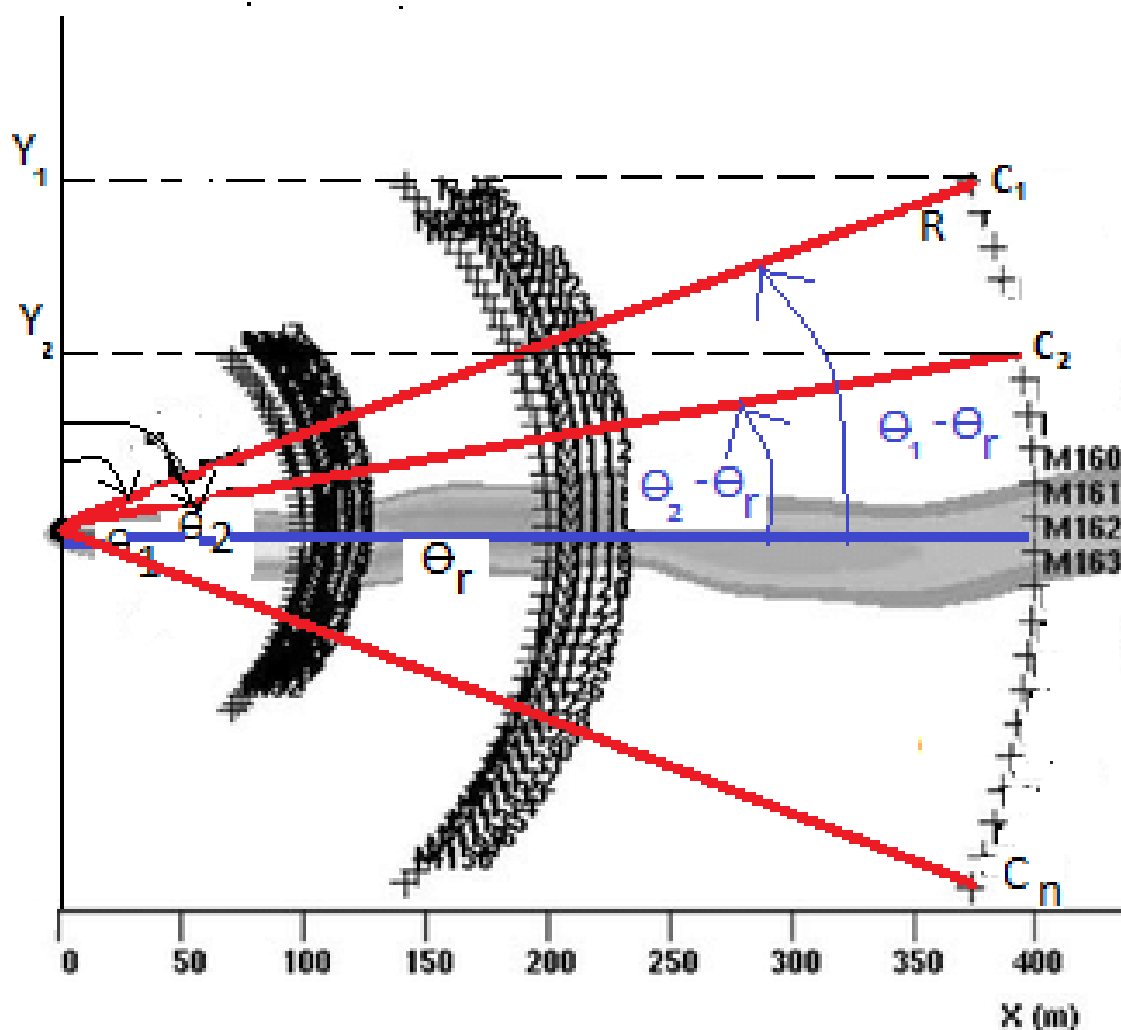


Figura 4 – Ilustração da projeção dos raios dos na direção perpendicular à direção do vento, empregada na integração numérica

Tabela 3 – Esquema dos dados utilizados para integração numérica

$y_i$	$C_i$
$y_1$	$C_1$
$y_2$	$C_2$
$\dots$	$\dots$
$y_n$	$C_n$

Devido ao fato que o espaçamento entre os pontos  $y_i$  não serem uniformes, a integração numérica da concentração mostrada na Tab. 3 foi realizada pelo método dos trapézios, a cada dois pontos sucessivos, usando a função *trapz*, nativa do *Octave*.

A fórmula geral do método dos trapézios é :

$$I_t = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [f(x_i) + f(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) \quad (4.2)$$

Conforme se observa na Figura 5, a integral numérica  $I_t$  corresponde a soma da área dos sucessivos trapézios  $I_i$ . Na Eq. 4.2, o espaçamento de cada trapézio é calculado por  $x_{i+1} - x_i$  e portanto esta fórmula continua válida mesmo quando o espaçamento é não-uniforme, como no nosso caso.

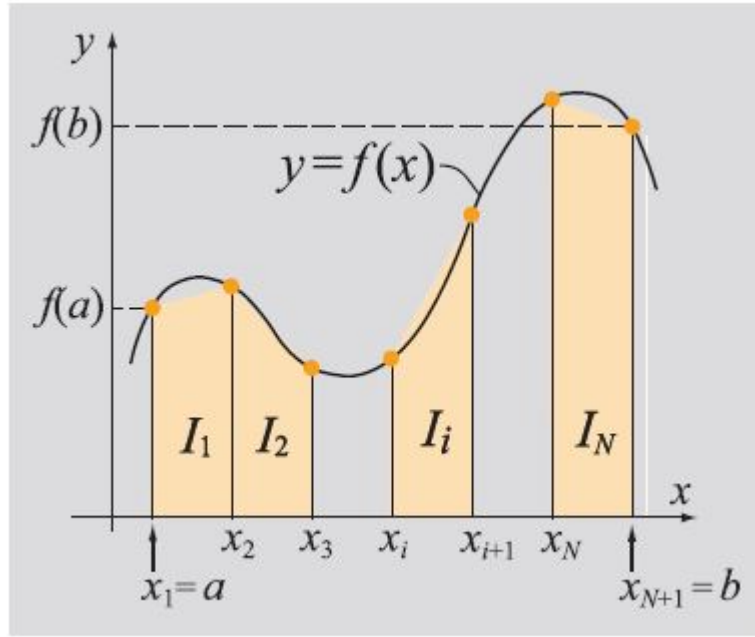


Figura 5 – Método dos Trapézios Composto (GILAT, 2008)

O procedimento descrito acima para a integração numérica na direção perpendicular ao vento foi implementado no programa escrito em *Octave*, conforme mostrado na Figura 6.

Neste código, o carregamento dos dados das concentrações do experimento 17, a título de exemplo, que pode ser visto na linha 3 e 4. Os valores numéricos destes dados estão dispostos na forma  $(\theta_i, C_i)$ , conforme apresentados na Figura 3.

Na linha 14 temos o cálculo da projeção do raio  $R$  com ângulo  $\theta$  sobre o eixo  $y$ , que é perpendicular a  $\theta_{dir}$ , onde  $\theta_{dir}$  é a direção do vento, ou seja,  $y_i = R \sin(\theta - \theta_{dir})$ . Ou seja,  $y_i$  é a projeção do raio  $R$  do respectivo arco sobre o eixo  $y$ , como é mostrado na figura 4 .

Na linha 24, usando a função *trapz* é calculada o valor da concentração integrada para o respectivo arco, de raios 50, 100, 200, 400 e 800 metros distante do fonte.

```

1  clear all
2  for k=1:2
3      if(k==1), dados=load('exp17_50_400.m'); endif
4      if(k==2), dados=load('exp17_800.m') ; endif
5  ai=dados(:,1);
6  if(k==1) ai=ai*2-1, endif % para os angulos internos, a  ↵
    medição é feita de 2 em 2 graus...
7  n=length(ai);
8  theta_dir=( ai(1)+ai(end) ) / 2 % supomos que o  ↵
    vento sopra na direção do angulo médio das medições
9  thetar=ai*pi/180; %conversão para radianos
10 thetar_dir=theta_dir * pi/180; %conversão para radianos
11 if(k==1)
12     for i=1:4
13         if(i==1) R=50, elseif(i==2) R=100,  ↵
            elseif(i==3) R=200, else R=400, endif
14         yi=R*sin( thetar - thetar_dir ); %calcula da  ↵
            projeção do raio de medição sobre o eixo y
15         Ci=dados(:,i+1); % Em miligramas por metro cúbico
16         Ai = trapz( yi , Ci ) ; %integração pelo método  ↵
            dos trapézios
17         Ai_g_m3=Ai/1000 %conversão de miligramas para  ↵
            gramas
18         Cy(i)=Ai_g_m3 ;
19     end
20 elseif(k==2)
21     R=800
22     yi=R*sin( thetar - thetar_dir );
23     Ci=dados(:,2); %Em gramas por metro cúbico
24     Ai = trapz( yi , Ci ) ; %integração pelo método  ↵
            dos trapézios
25     Ai_g_m3=Ai/1000 %conversão de miligramas para  ↵
            gramas
26     Cy(k+3)=Ai_g_m3 ;
27 endif %fim do if do k
28 endfor %fim do for em k

```

Figura 6 – Programa em *Octave* para realizar a integração numérica.

# 5 Simulação Numérica dos Experimentos

## 5.1 Campos de velocidade e concentração

Na Figura 7 apresentamos o campo de velocidade (mostrado na forma de vetores) e o campo de concentração (representado no degradê de cores) para o experimento número 24.

Como se observa, o campo de velocidade é horizontalmente homogêneo, estando de acordo com a solução analítica proposta por (RICHARDS; HOXEY, 2010). Para uma melhor visualização, nas direções  $x$  e  $z$  os vetores são plotados com um espaçamento maior que o número real de pontos da malha.

Ainda com relação a Figura 7, observa-se que o a concentração é máxima na posição de descarga (fonte) e sofre um espalhamento nas direções  $x$  e direção  $z$ . Na direção do vento ( $x$ ) o espalhamento é maior, pois o espalhamento é motivado tanto pela difusão quanto pela advecção.

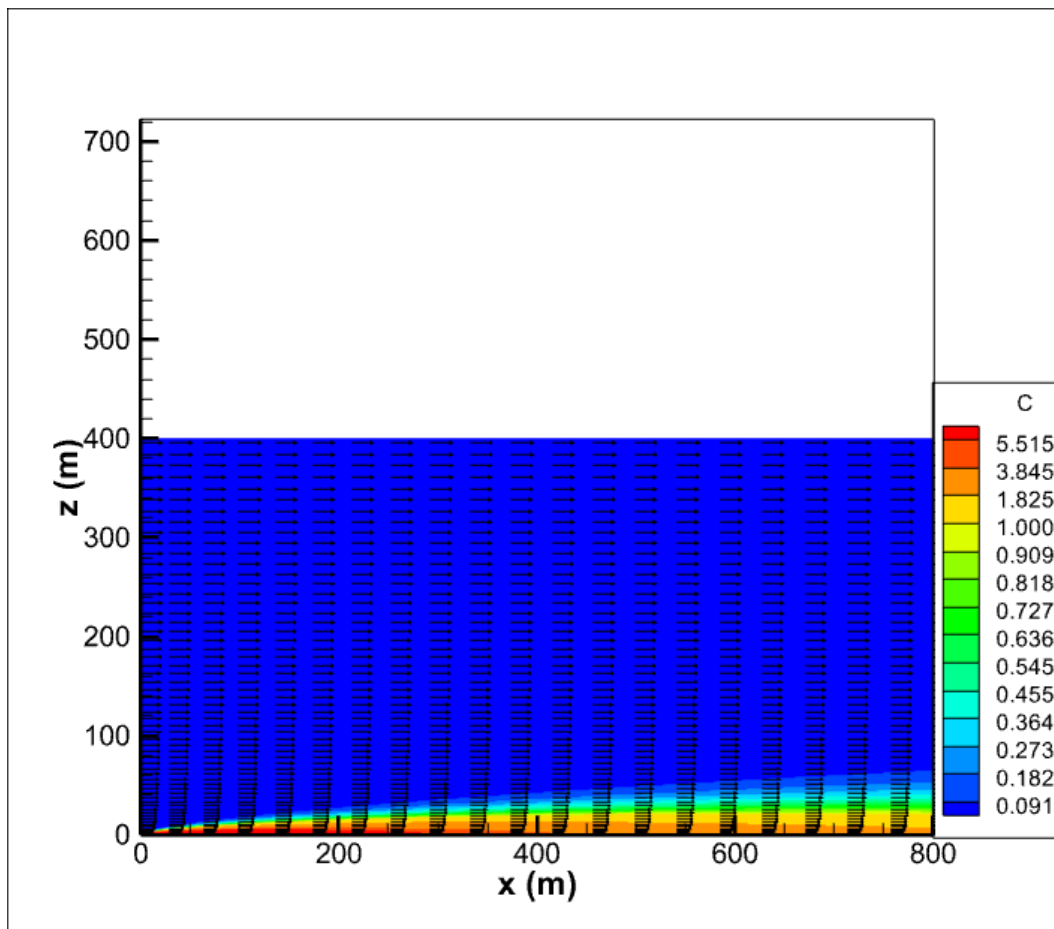


Figura 7 – Gráfico de campo velocidades do experimento 24.

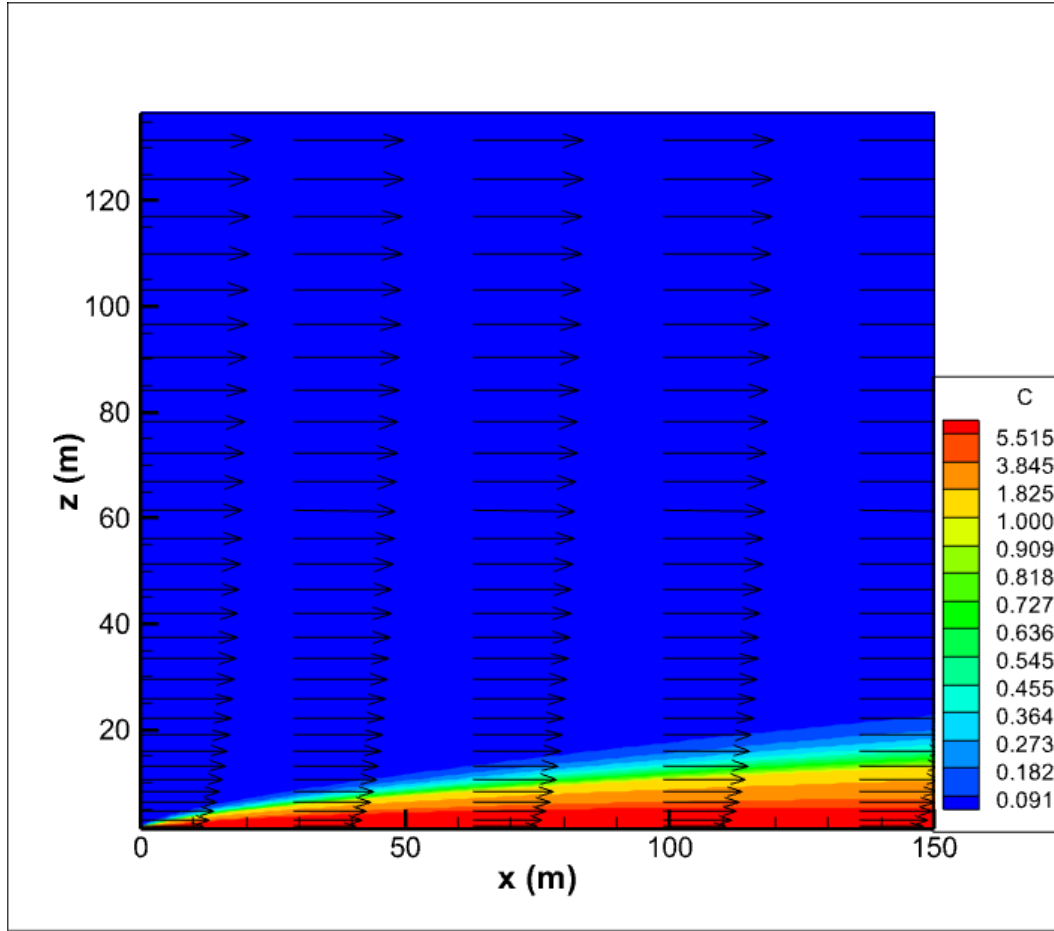


Figura 8 – Gráfico de campo velocidades do experimento 24

Na figura 8 é apresentada uma ampliação da região próximo ao fonte, a fim de permitir uma melhor visualização da distribuição dos vetores de velocidade e do degradê de cores do campo de concentração.

Nas figuras 9 e 10, apresenta-se a solução numérica do campo de velocidade e concentração relativa ao experimento 60. As mesmas considerações feitas para o experimento 24 permanecem válidas. No entanto, como se observa, a altura da camada limite do experimento 60 é de 171m, ao passo que no experimento 24 a altura desta camada limite é de 400m. Nos dois casos, observa-se que nos primeiros 800m do escoamento, o espalhamento do poluente não atinge estas alturas. Pode-se concluir que a simulação de toda a camada limite do experimento só seria necessária se o domínio de cálculo fosse estendido para além dos 800 metros utilizados no experimento Prairie Grass.

## 5.2 Perfil vertical de $k$ e $\epsilon$

A seguir serão apresentados os perfis verticais de  $k$ ,  $\epsilon$ , da viscosidade turbulenta e da componente da velocidade  $u$ , na posição  $x = 400$  m.

Na figura 11a apresenta-se o perfil de  $k$  na direção  $z$ , relativa ao experimento 60.



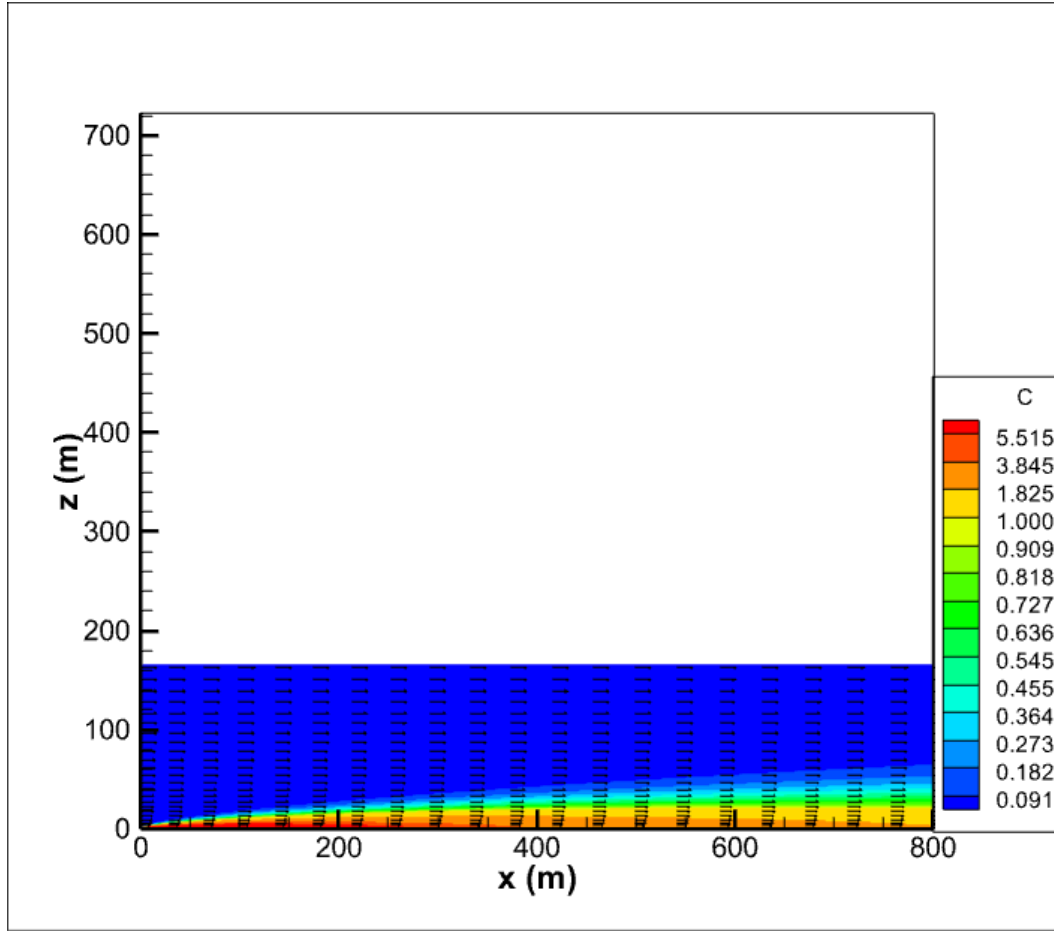


Figura 9 – Gráfico de campo velocidades do experimento 60

Observa-se que a solução numérica é aproximadamente constante e condizente com a solução analítica obtida para o modelo  $k - \epsilon$  simplificado, com a hipótese de escoamento horizontalmente homogêneo, ou seja  $k = k^*$  (ver equação 2.35). Acredita-se que o perfil seria ainda mais retificado reduzindo-se o valor do critério de parada do processo iterativo, que foi de  $10^{-5}$  para os campos de velocidade, de  $k$  e de  $\epsilon$  e de  $10^{-8}$  para os campos de concentração.

Na figura 11b apresenta-se o perfil de  $\epsilon$  na direção  $z$ , relativa ao experimento 60. Novamente, o perfil obtido é condizente com a solução exata obtida para o modelo  $k - \epsilon$  simplificado, com a hipótese de escoamento horizontalmente homogêneo (ver equação 2.36). Ou seja, o valor de  $\epsilon$  decai numa relação inversa com a altura  $z$ . Para os demais experimentos, as soluções para  $k$  e  $\epsilon$  são semelhantes.

### 5.3 Perfil vertical da viscosidade turbulenta

A seguir, na Figuras 12a é exibido o perfil da viscosidade turbulenta, obtido para a simulação do experimento 29. Na Figura 12b, é exibido o perfil da viscosidade turbulenta, obtido para a simulação do experimento 56, mostrados como exemplo. Conforme se

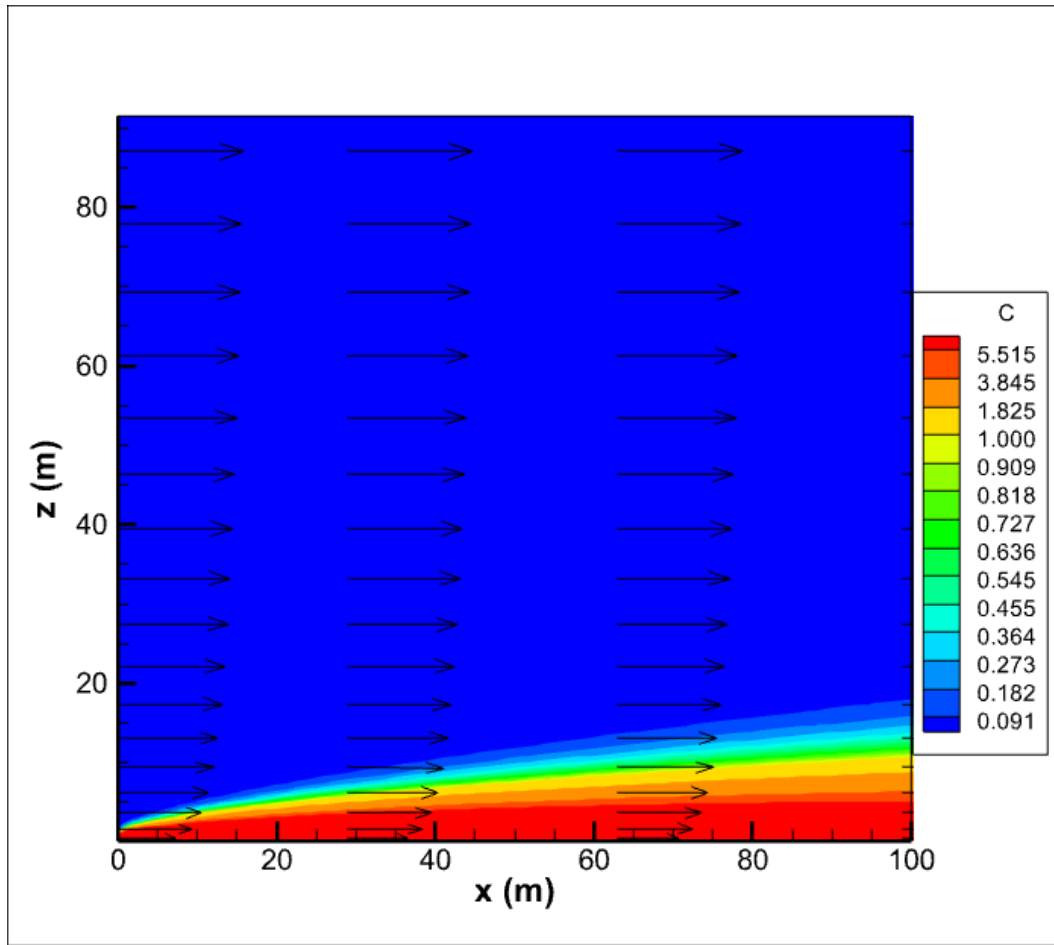


Figura 10 – Gráfico de campo velocidades do experimento 60.

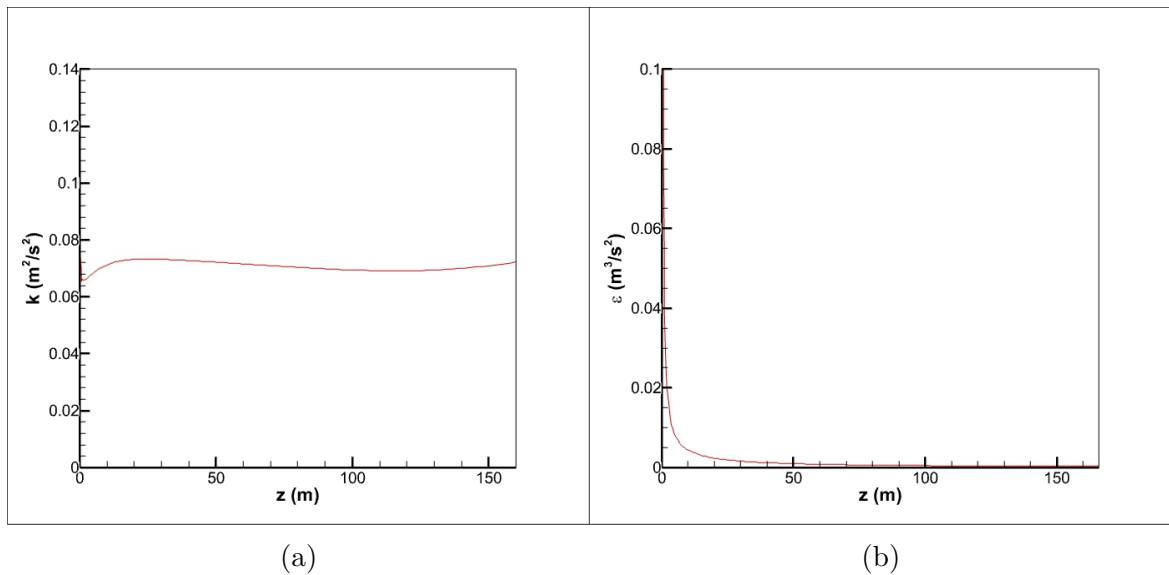


Figura 11 – Perfil Numérico de  $k$  e  $\epsilon$  para o experimento 60. a) Perfil de  $k$  e b) Perfil de  $\epsilon$ .

observa, o perfil é praticamente linear na maior parte da altura  $z$ , como obtido na solução analítica do modelo (ver equação 2.37), exceto no topo, onde o perfil sobrepõe uma

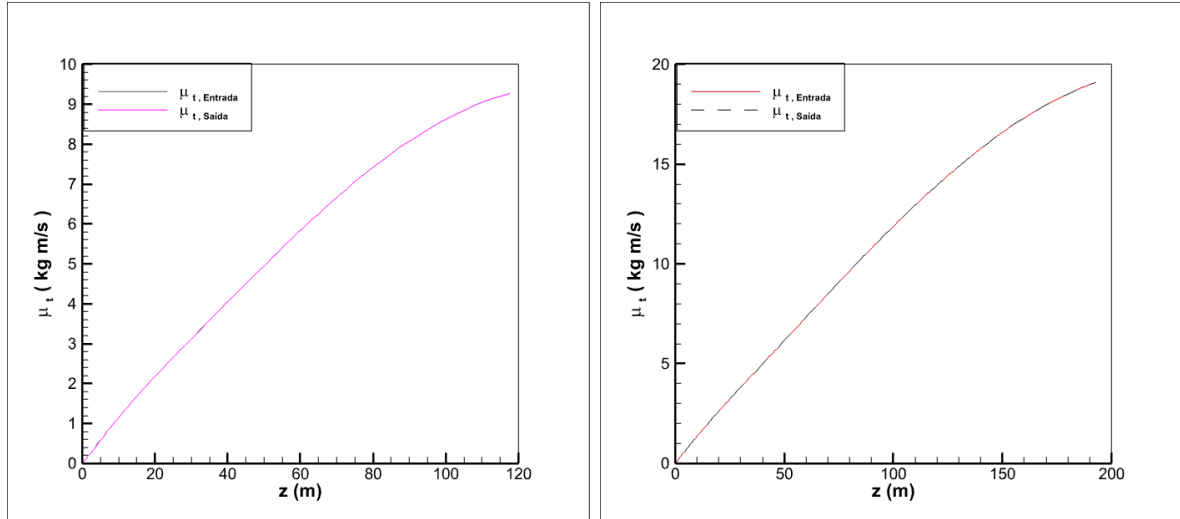


Figura 12 – Gráfico das Viscosidades de Entrada e Saída: Experimentos 29 e 56

curvatura, provocada pela imposição da condição de contorno de derivada nula para  $\epsilon$ , de modo que o perfil de  $\mu_t$  tende a ter derivada nula também. Esta imperfeição poderia ser evitada impondo-se condição de contorno de primeira espécie para  $\epsilon$ , no entanto, como já foi demonstrado, a concentração é praticamente nula na região do topo, e portanto, qualquer erro nesta região não irá afetar os valores de concentração próximo do solo.

## 5.4 Perfil vertical da velocidade na entrada e na saída

Na Figura 13a e 13b são exibidos os perfis de velocidade do vento para os experimentos 29 e 56. Conforme se observa, os perfis de velocidade na entrada e na saída são praticamente iguais, comprovando que a solução numérica é horizontalmente homogênea, tal como suposto em (RICHARDS; HOXEY, 2010), da mesma forma como modelado em (SAVICKI; GOULART; BECKER, 2021), usando o modelo  $k - \epsilon$  simplificado.

## 5.5 Comparação entre a solução numérica e os dados experimentais para a concentração

A seguir, nas Figuras 14a, 14b, 15a, 15b, 16a, 16b, 17a, 17b, 18a, 18b, 19a, 19b, 20a apresenta-se uma comparação entre o perfil da concentração obtido via simulação numérica com os dados experimentais, na direção longitudinal, na altura  $z=1,5\text{m}$ , para os experimentos 17, 21, 22, 23, 24, 29, 37, 38, 42, 54, 55, 56 e 60, conforme detalhado na Tab. 2.

Conforme se observa nestas figuras, obteve-se uma excelente concordância entre os dados experimentais e aqueles obtidos via simulação numérica. Salienta-se que os

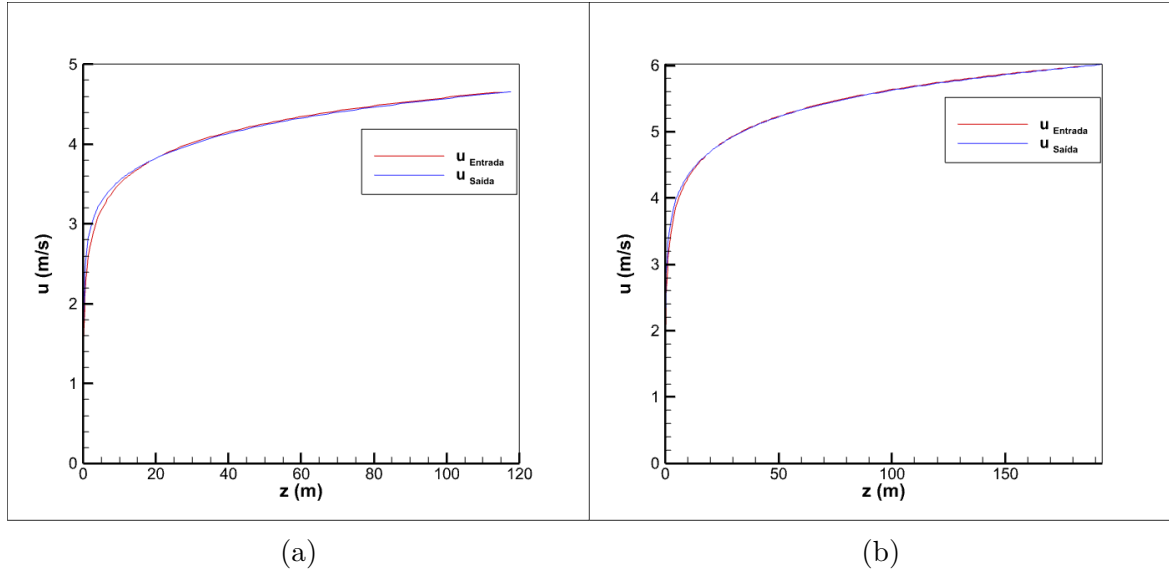


Figura 13 – Perfis de velocidades na entrada e saída para os experimentos a) 29 e b) 56

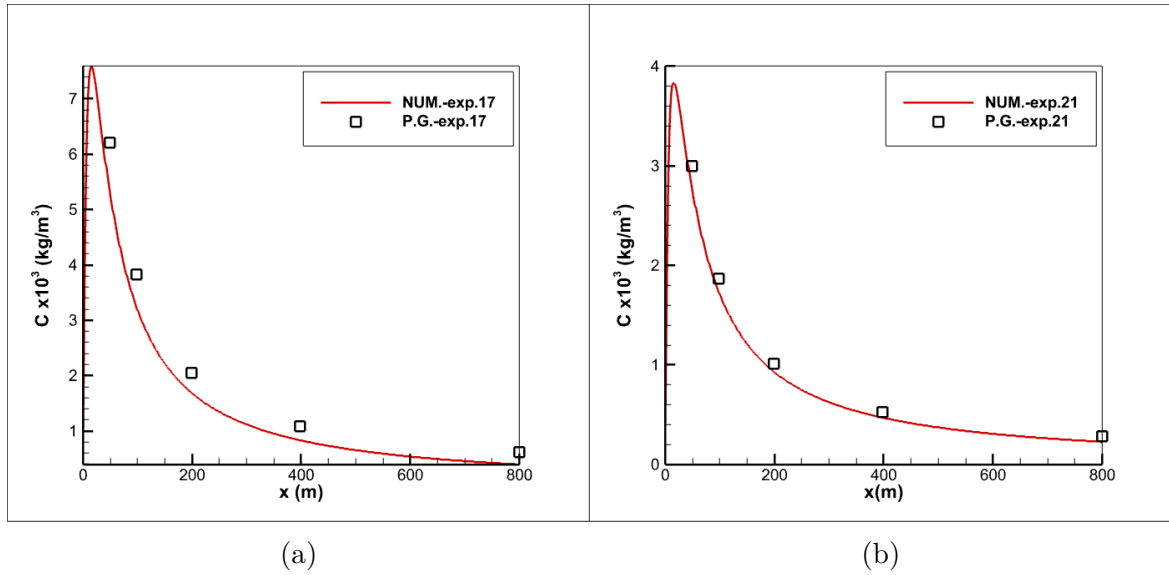


Figura 14 – Comparação da solução numérica com os dados experimentais: a) Experimento 17 e b) Experimento 21.

resultados aqui obtidos apresentam uma concordância superior em relação aqueles obtidos por diversos pesquisadores, como por exemplo, (MOREIRA, 2007).

## 5.6 Fator de dois

O parâmetro *fator de dois* mostra a quantidade de dados, normalizados, que está contida no intervalo  $[0,5, 2,0]$ . Este parâmetro é sintetizado na relação

$$0,5 \leq \frac{C_{num}}{C_{exp}} \leq 2,0 \quad (5.1)$$

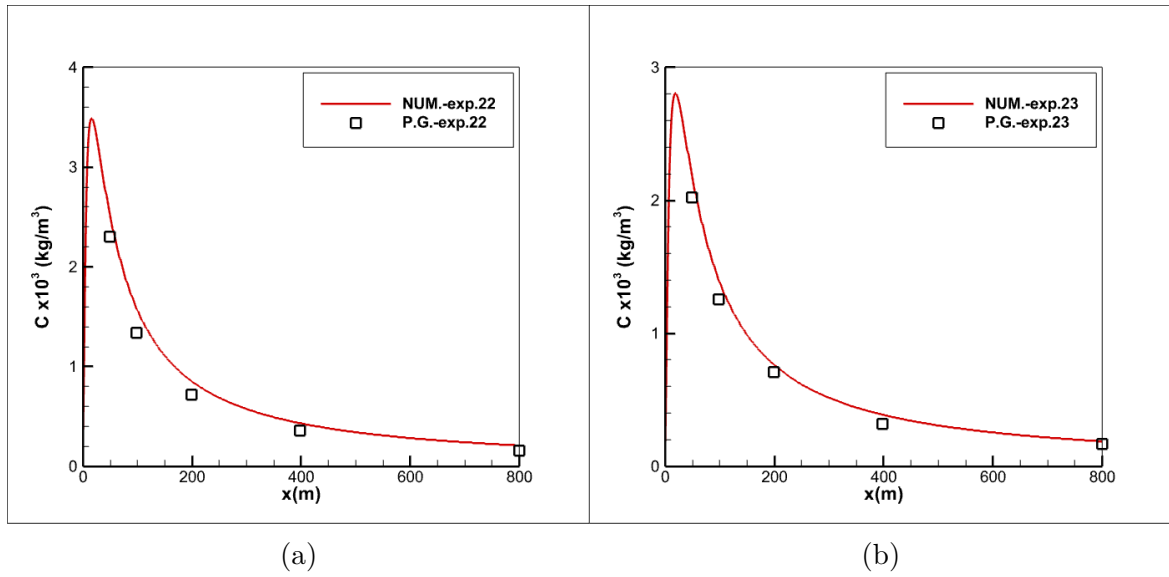


Figura 15 – Comparação da solução numérica com os dados experimentais: a) Experimento 22 e b) Experimento 23.

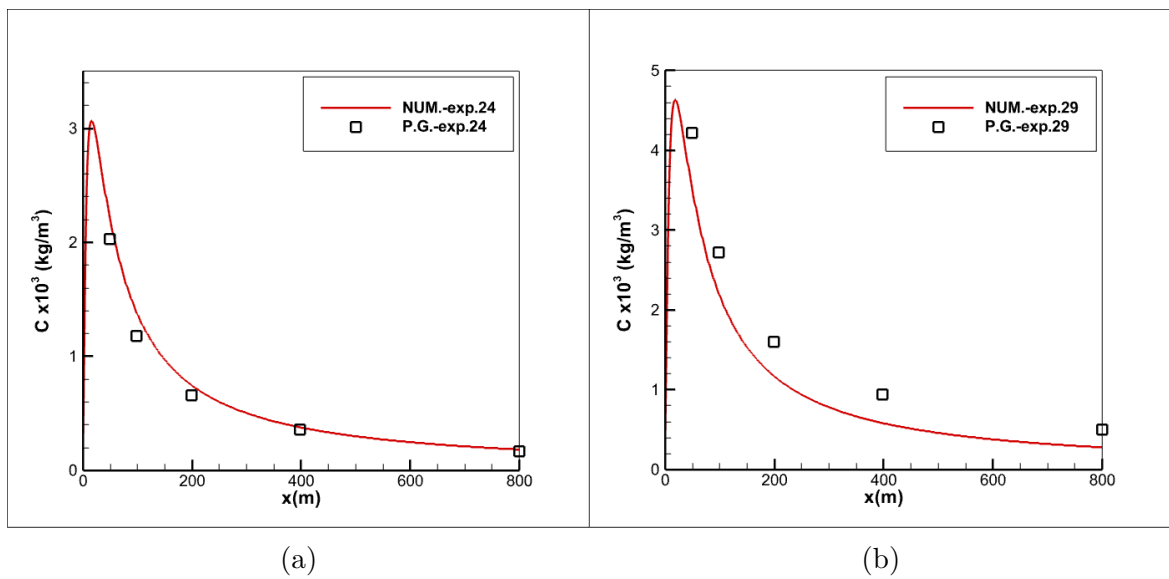


Figura 16 – Comparação da solução numérica com os dados experimentais: a) Experimento 24 e b) Experimento 29.

O fator de dois verifica se valor obtido via simulação numérica está entre a metade e o dobro do valor experimental. O fator de dois ideal é 1, de forma que quanto maior for o percentual de dados dentro do intervalo  $[0,5 - 2,0]$ , maior é a confiabilidade da solução. Porém, um mínimo de 50 por cento dos dados já é considerado aceitável. Para a nossa simulação, obteve-se que 100 por cento dos dados estão dentro da faixa definida pelo fator de dois, o que atesta a qualidade do estudo e a confiabilidade do modelo utilizado.

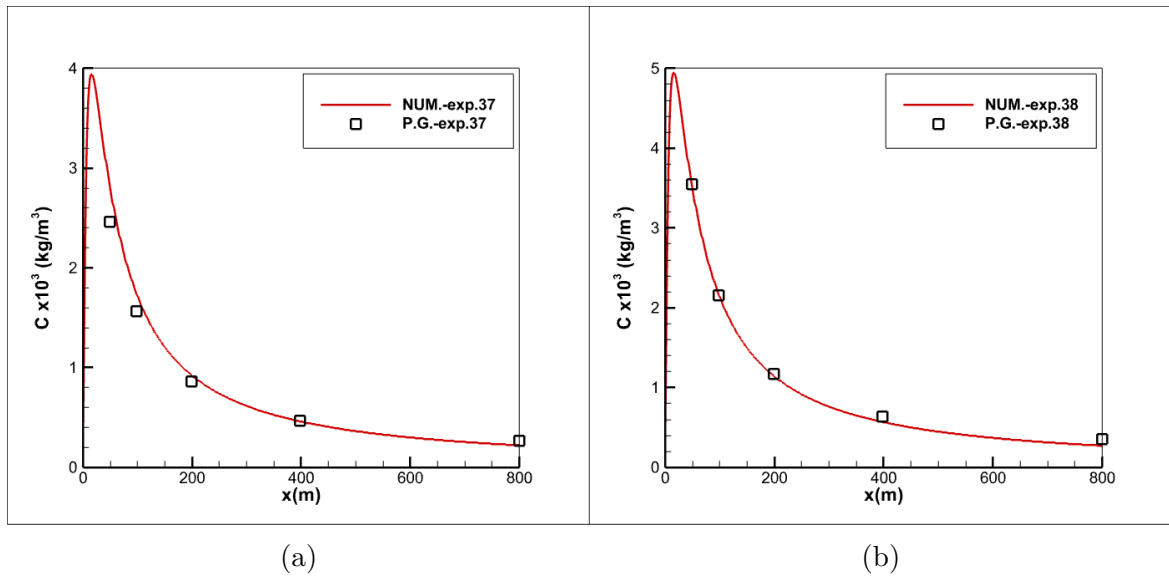


Figura 17 – Comparação da solução numérica com os dados experimentais: a) Experimento 37 e b) Experimento 38.

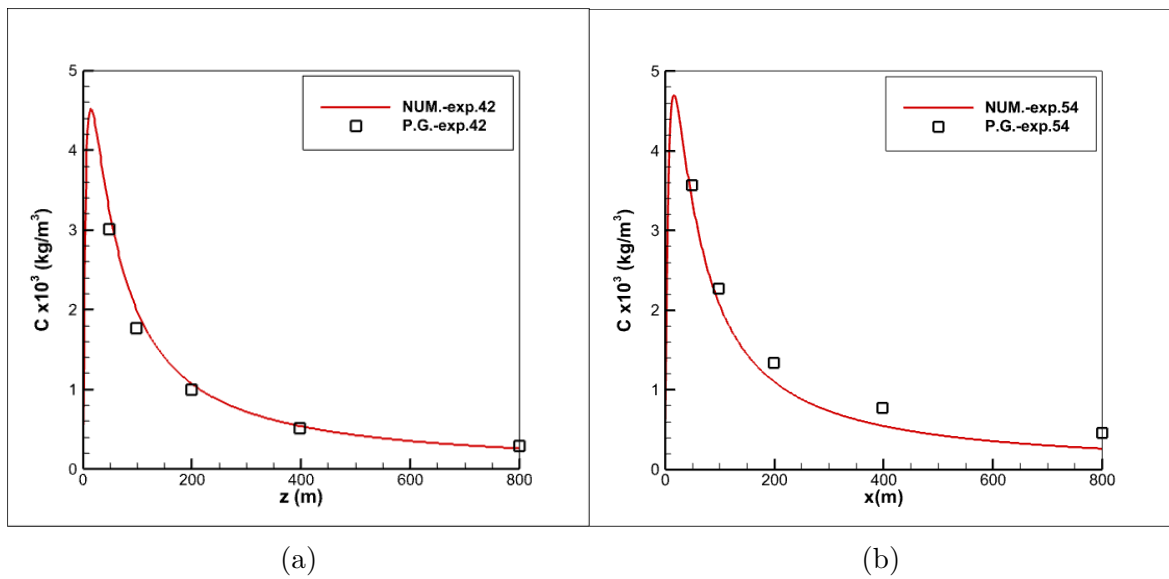


Figura 18 – Comparação da solução numérica com os dados experimentais: a) Experimento 42 e b) Experimento 54.

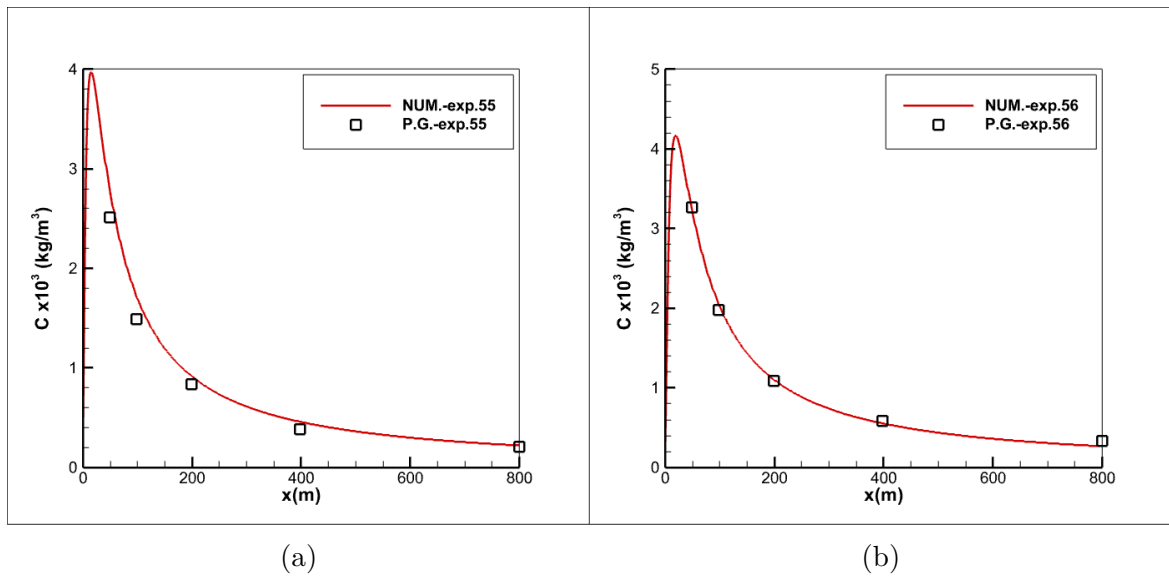


Figura 19 – Comparação da solução numérica com os dados experimentais: a) Experimento 55 e b) Experimento 56.

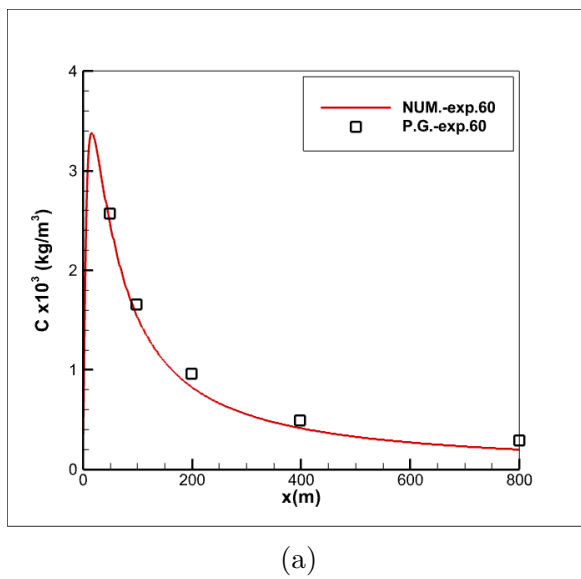


Figura 20 – Comparação da solução numérica com os dados experimentais: Experimento 60

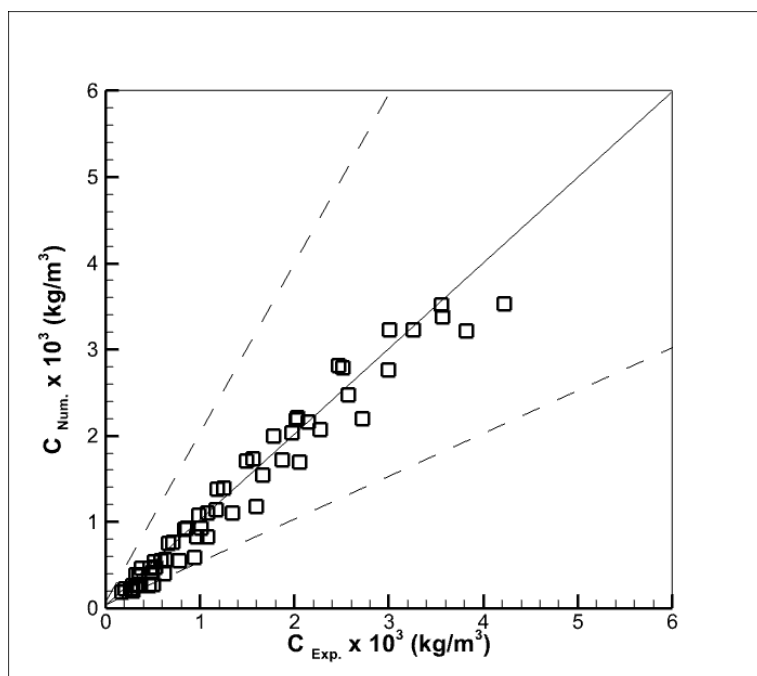


Figura 21 – Gráfico do erro Fator de 2



## 6 Conclusões

Nesse trabalho apresentou-se um modelo matemático para descrever o escoamento atmosférico em condições neutras, utilizando o modelo de turbulência  $k - \epsilon$  simplificado. Conseguimos concluir com esse trabalho que:

1. O modelo  $k - \epsilon$  *simplificado* é adequado para simular a camada limite atmosférica em condições neutras.
2. A solução numérica é horizontalmente homogênea, tal como requerido pela solução analítica do problema para os campos de velocidade,  $k$  e  $\epsilon$ .
3. Obteve-se uma excelente concordância entre a solução numérica e os valores experimentais para os valores de concentração do projeto Prairie-Grass.

# Referências

- BARAD, N. *Project Praire Grass: A Field Program in Diffusion*. 9. ed. [S.l.]: *Geophysical Research Papers*, 1958. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 13.
- CELIK, I. B. *Introductory Turbulence Modeling*. [S.l.]: Mechanical & Aerospace Engineering Dept, West Virginia University, P.O. Box 6106, Morgantown, WV 26506-6106., 1999. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 5.
- GILAT, A. *Metodos Numericos Para Engenheiros E Cientistas*. 1. ed. [S.l.]: *Bookman*, 2008. Citado na página 16.
- MOREIRA, J. C. C. D. M. Evaluation of two semi-analytical techniques in air quality applications. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 22, p. 100, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 23.
- NORRIS, S. E.; RICHARDS, P. J. Appropriate boundary conditions for computational wind engineering models revisited. *Fifth Symposium on computational Wind Engineering*, 2010. Citado na página 1.
- PATANKAR, S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. 1. ed. [S.l.]: CRC Press, 1980. Citado na página 11.
- RICHARDS, P. J.; HOXEY, R. P. Appropriate boundary conditions for computational wind engineering models using the  $k - \epsilon$  turbulence model. *Journal of Wind engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 46, p. 145–153, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 1, 18 e 22.
- SAVICKI, D. L.; GOULART, A.; BECKER, G. Z. A simplified  $k\epsilon$  turbulence model. *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, v. 43, p. 384, 2021. Citado 7 vezes nas páginas 2, 3, 1, 4, 6, 10 e 22.
- SCHINDLER, R.; ACKERMAN, J. The environmental hydraulics of turbulent boundary layers. In: \_\_\_\_\_. [S.l.: s.n.], 2010. p. 87–125. ISBN 978-981-4291-99-6. Citado na página 7.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. 2. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2007. Citado na página 11.