

Cibelle Abelenda Tavares

O Polo Naval e o município de Rio Grande: um estudo sobre a dinâmica populacional

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2017

Cibelle Abelenda Tavares

O Polo Naval e o município de Rio Grande: um estudo sobre a dinâmica populacional

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada Bacharelado, submetido por Cibelle Abelenda Tavares junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Dezembro, 2017

Agradecimentos

Agradeço minha família por sempre estar do meu lado, me ajudando e apoiando em todos os momentos, me dando estrutura para a realização deste trabalho, sem vocês eu nada seria.

Ao meu marido e amigo Michel, parceiro de todas as horas, pela paciência, carinho e compreensão, por acreditar em mim e sempre me incentivar nos momentos de desânimo.

Aos meus colegas de curso, pelo companheirismo, troca de experiências e pelos grupos de estudos.

Em especial, agradeço meus amigos queridos Carol, Hellen e Kelvin, por tornarem essa trajetória mais leve e alegre, obrigado por todos os momentos de convivência, de sonhos e conquistas compartilhados.

A todos os professores que de alguma maneira colaboraram para que este momento se tornasse realidade.

A minha orientadora Dra. Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez, por todo o conhecimento passado, pela compreensão e atenção dedicada nesta etapa do meu processo de formação.

*“O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo.
Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas
admiráveis.”*
(José de Alencar)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver os métodos empregados em um estudo sobre as tendências de crescimento e decrescimento da população de trabalhadores do Polo Naval e do número de habitantes do Município de Rio Grande, entre os anos de 2005 e 2015. Para tanto, definiram-se os métodos numéricos (ajuste por Mínimos Quadrados) e os modelos analíticos clássicos de Malthus e Verhulst para avaliar a dinâmica das populações. A avaliação dos modelos obtidos foi feita através do software wxMaxima, que foi muito útil para a realização dos cálculos e representação gráfica. Os dados relativos às populações foram coletados junto à Fundação de Economia e Estatística e o Sindicato dos Metalúrgicos de Rio Grande.

Palavras-chaves: Crescimento Populacional, Polo Naval, Rio Grande.

Abstract

This study aims to develop the methods employed in a study on the trends of growth and decrease of the population of workers of the Naval Pole and the number of inhabitants of the Municipality of Rio Grande, RS between 2005 and 2015. For this, Least Squares and the classic analytical models of Malthus and Verhulst were used to evaluate population dynamics. The evaluation of the obtained models was done through the software wxMaxima, which was very useful for the accomplishment of the calculations and graphical representation. Population data were collected from the Economics and Statistics Foundation and the Metalworkers Union of Rio Grande.

Key-words: Population growth, Polo Naval, Rio Grande.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Assembleia na Empresa ECOVIX 2013	12
Figura 2 – Estaleiro com obras paradas em Rio Grande	13
Figura 3 – Diagrama de dispersão para os dados da população de Rio Grande no wxMaxima	29
Figura 4 – Ajuste Linear da população de Rio Grande no wxMaxima	30
Figura 5 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.8)	32
Figura 6 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.9)	34
Figura 7 – Modelo Polinomial para População de Rio Grande	37
Figura 8 – Conjunto de figuras dos polinômios de grau 2, 6 e 9	38
Figura 9 – Modelo Malthusiano para População de Rio Grande	40
Figura 10 – Diagrama de dispersão para os dados da população de trabalhadores no wxMaxima	43
Figura 11 – Ajuste Linear de trabalhadores Situação A	45
Figura 12 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.25)	47
Figura 13 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.26)	47
Figura 14 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ das funções (3.25) e (3.26)	48
Figura 15 – Modelo Malthusiano Situação A	52
Figura 16 – Modelo de Verhulst Situação A	54
Figura 17 – Diagrama de dispersão para os dados da população de trabalhadores Situação B no wxMaxima	56
Figura 18 – Modelo Linear Situação B	57
Figura 19 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.38)	59
Figura 20 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.39)	59
Figura 21 – Modelo Polinomial Situação B	61
Figura 22 – Conjunto de figuras dos polinômios de grau 4, 7 e 10	61
Figura 23 – Diagrama de dispersão para os dados da população de trabalhadores Situação C no wxMaxima	63
Figura 24 – Ajuste Linear da população de trabalhadores no wxMaxima Situação C	65
Figura 25 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.44)	66
Figura 26 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.45)	66
Figura 27 – Ajuste Exponencial das funções (3.44) e (3.45)	67
Figura 28 – Modelo Malthusiano Situação C	69
Figura 29 – Modelo de Verhulst Situação C	71
Figura 30 – Gráfico obtido do comando <i>plot2d</i>	78
Figura 31 – Modelo Polinomial	79
Figura 32 – Conjunto de figuras dos polinômios de grau 3, 5 e 8	80

Figura 33 – Modelo Polinomial Situação C	81
Figura 34 – Conjunto de figuras dos polinômios de grau 3 e 5	82

Lista de tabelas

Tabela 1 – População de Rio Grande	28
Tabela 2 – Coeficientes para o cálculo empregando o ajuste linear	29
Tabela 3 – Cálculo para o ajuste exponencial	31
Tabela 4 – Estimativa da população de Rio Grande	34
Tabela 5 – Erro residual dos Polinômios	35
Tabela 6 – Análise da população de Rio Grande para os polinômios de grau 2, 6, 9 e 10.	38
Tabela 7 – Modelo Populacional da Cidade de Rio Grande Modelo Malthusiano .	39
Tabela 8 – Taxa de crescimento anual da população de Rio Grande	40
Tabela 9 – Valores utilizados no método de Ford-Walford	41
Tabela 10 – Estimativa dos modelos comparados a População Real de Rio Grande .	42
Tabela 11 – População de Trabalhadores Situação A	43
Tabela 12 – Coeficientes para o cálculo empregando o ajuste linear Situação A . . .	44
Tabela 13 – Cálculo para o ajuste exponencial Situação A	46
Tabela 14 – Erro residual dos Polinômios Situação A	51
Tabela 15 – Modelo Populacional de trabalhadores Situação A	52
Tabela 16 – Taxa de crescimento anual Situação A	53
Tabela 17 – Valores utilizados no método de Ford-Walford Situação A	53
Tabela 18 – Análise dos modelos comparados para a Situação A	54
Tabela 19 – População de Trabalhadores Situação B	55
Tabela 20 – Coeficientes para o cálculo empregando o ajuste linear Situação B . . .	57
Tabela 21 – Cálculo para o ajuste exponencial Situação B	58
Tabela 22 – Estimativa para a Situação B Modelo Exponencial	60
Tabela 23 – Erro residual dos Polinômios Situação B	62
Tabela 24 – População de Trabalhadores Situação C	63
Tabela 25 – Coeficientes para o cálculo empregando o ajuste linear Situação C . . .	64
Tabela 26 – Cálculo para o ajuste exponencial Situação C	65
Tabela 27 – Erro residual dos Polinômios Situação C	67
Tabela 28 – Modelo Populacional de trabalhadores Situação C	68
Tabela 29 – Análise dos modelos comparados a Situação C	69
Tabela 30 – Taxa de crescimento anual Situação C	70
Tabela 31 – Valores utilizados no método de Ford-Walford Situação B	70
Tabela 32 – Análise dos modelos comparados a Situação B	80

Sumário

	Introdução	11
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2	FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	17
2.1	Métodos Numéricos	17
2.1.1	Método dos Mínimos Quadrados	17
2.1.2	Ajuste Linear	18
2.1.3	Ajuste Exponencial	19
2.1.4	Ajuste Polinomial	20
2.2	Métodos Analíticos	21
2.2.1	Modelo Malthusiano	21
2.2.2	Modelo de Verhulst	24
3	RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO	27
3.1	Software wxMaxima	27
3.2	Estudo sobre a população da Cidade de Rio Grande	28
3.2.1	Ajuste Linear	29
3.2.2	Ajuste Exponencial	31
3.2.3	Ajuste Polinomial	34
3.2.4	Modelo de Malthus	38
3.2.5	Modelo Logístico ou Verhulst	40
3.3	Estudo sobre a população dos Trabalhadores do Polo Naval - Situação A	42
3.3.1	Ajuste Linear	44
3.3.2	Ajuste Exponencial	45
3.3.3	Ajuste Polinomial	48
3.3.4	Modelo de Malthus	51
3.3.5	Modelo Logístico ou Verhulst	52
3.4	Estudo sobre a população dos Trabalhadores do Polo Naval - Situação B	55
3.4.1	Ajuste Linear	56
3.4.2	Ajuste Exponencial	58
3.4.3	Ajuste Polinomial	60
3.5	Estudo sobre a população dos Trabalhadores do Polo Naval - Situação C	62

3.5.1	Ajuste Linear	64
3.5.2	Ajuste Exponencial	65
3.5.3	Ajuste Polinomial	67
3.5.4	Modelo de Malthus	68
3.5.5	Modelo Logístico ou Verhulst	69
4	CONCLUSÕES	72
	REFERÊNCIAS	73
	ANEXOS	75
	ANEXO A – PRINCIPAIS COMANDOS DO WXMAXIMA	76
A.1	lsquares	76
A.2	plsquares	76
A.3	lbfgs	77
A.4	stats	77
	ANEXO B – RESULTADO DOS POLINÔMIOS PARA AS SITU- AÇÕES A, B E C	79
B.1	3.2.3 Situação A	79
B.2	3.4.3 Situação B	80
B.3	3.5.3 Situação C	81

Introdução

O estudo da dinâmica populacional é importante por dar cunho específico à configuração de uma sociedade e às questões pertinentes aos seus múltiplos aspectos, sejam econômicos, políticos ou socioculturais (SETI et al., 1999). É importante, ainda, observar o crescimento da população através das transformações ocorridas durante o processo de urbanização.

O atual município do Rio Grande teve, no seu início, um papel importante na defesa e manutenção do território disputado pelas coroas portuguesas e espanholas. A cidade de Rio Grande foi fundada em 19 de fevereiro de 1737, pelo Brigadeiro José da Silva Paes, e é considerada a mais antiga do Rio Grande do Sul. O município é privilegiado pela sua natureza, pois possui a maior praia do mundo em extensão (Cassino - 245 km, segundo o *Guinness Book*); lagoas; uma reserva ecológica (Taim) com 32 mil hectares e uma infinidade de animais silvestres (PORTO, 2017).

A cidade se desenvolveu a partir da intensificação comercial portuária, sinalizada com a perda da Colônia do Sacramento e o início do ciclo do charque no Rio Grande. A dragagem do cais e a construção do Porto (1823), tornam a Vila do Rio Grande um importante centro comercial (NOGUEZ, 2015). O desenvolvimento econômico propiciado pelo charque e pelo comércio de exportação e importação levou Rio Grande a um crescimento comercial considerável no século XIX (MARTINS, 2006).

A partir da construção do Porto Novo, no começo do século XX, intensifica-se a ocupação urbana, principalmente próxima às indústrias que se instalavam, o Frigorífico Swift (1917) e a Refinaria Ipiranga (1937) (NOGUEZ, 2015).

A partir do início do século XXI, os investimentos, principalmente no setor naval, impulsionaram o crescimento populacional do município. No ano de 2013, com o auge da produção nos estaleiros, Rio Grande e as cidades vizinhas fervilhavam com a presença dos trabalhadores que aqueceram a economia e deram novas perspectivas a uma região desacreditada por décadas (GLOBO, 2017). O Polo Naval chegou a empregar quase 20 mil trabalhadores (Figura 1) neste ano, transformando o município de Rio Grande na cidade símbolo da nova era econômica na metade sul do estado.



Figura 1 – Assembleia na Empresa ECOVIX 2013

Fonte: Sindicato dos Metalúrgicos de Rio Grande

Entretanto, no início do ano de 2017, o setor metalúrgico foi atingido pela crise econômica do país ocasionada pela revelação dos escândalos de corrupção na Operação Lava-Jato e o Polo Naval de Rio Grande passou a empregar pouco mais de 200 funcionários (Figura 2). Este número ainda vem diminuindo e, até o final de 2017, não deve ultrapassar 100 trabalhadores (AVILA, 2017).



Figura 2 – Estaleiro com obras paradas em Rio Grande

Fonte: <http://g1.globo.com/rs/rio-grande-do-sul/noticia/2017/03/audiencia-publica-em-rio-grande-busca-solucoes-para-polo-naval.html>

A variação do número de habitantes do município do Rio Grande está relacionada, entre outros fatores, com a chegada (e saída) de mão-de-obra especializada e a criação (extinção) de vagas de emprego no setor metalúrgico. Em virtude desses índices, decidiu-se, nesse trabalho, estudar a dinâmica da população da cidade de Rio Grande e de trabalhadores do Polo Naval do município. Acredita-se que a análise da evolução do crescimento do tamanho dessas populações possa ser útil para o planejamento da urbanização, desenvolvimento econômico e mercado de trabalho do município.

Para abordar matematicamente os problemas, foram empregados métodos numéricos (ajuste por Mínimos Quadrados) e os modelos analíticos clássicos de Malthus e Verhulst para avaliar a dinâmica das populações. Os resultados foram obtidos utilizando-se o software wxMaxima e os dados relativos às populações empregados neste trabalho coletados junto à Fundação de Economia e Estatística - FEE e o Sindicato dos Metalúrgicos de Rio Grande (STIMMERG).

Para atingir os objetivos propostos, esse trabalho está organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo, faz-se uma breve revisão bibliográfica sobre a dinâmica populacional. No segundo capítulo, descrevem-se as metodologias utilizadas, abordando-se a fundamentação numérica (ajustes linear, exponencial e polinomial) e a fundamentação analítica (modelos Malthusiano e Logístico). No terceiro, discutem-se os principais resultados obtidos com o emprego do software wxMaxima. Por fim, no quarto capítulo, apresentam-se as conclusões a respeito da dinâmica da população de trabalhadores do

Polo Naval e da cidade de Rio Grande.

1 Revisão Bibliográfica

Decorrente da importância do estudo da dinâmica de populações para a configuração de uma sociedade encontra-se na literatura uma quantidade significativa de trabalhos que abordam o assunto.

No trabalho de (MOSCHOUTIS, 2013) é realizado um estudo abrangente sobre como modelar o crescimento populacional brasileiro. O primeiro passo da autora foi identificar, através de estudos sobre os dados censitários, os quais foram coletados diretamente do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), os relevantes na construção da pesquisa. O trabalho buscou também identificar o melhor resultado para dois problemas similares (população já estimada e população a estimar). Paralelamente, foram investigados alguns estudos já realizados que forneceram suporte para a construção da fundamentação matemática. Dentre as opções existentes foram escolhidos cinco modelos, sobre os quais os estudos foram aprofundados. Os cinco modelos apresentados neste trabalho são: linear, exponencial, polinomial, malthusiano e logístico. Tais modelos são significativos uma vez que possuem diferença na forma como foram desenvolvidos, e mais ainda, no resultado que apresentaram. A autora conclui que para a população já mensurada pelo Censo, o modelo exponencial se adapta também para o estudo de estimativas, apesar de num primeiro momento, crer que o modelo logístico seria o mais indicado.

Na pesquisa de (SANCHES; SOUSA, 2011) é apresentado um estudo sobre o emprego de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) no crescimento demográfico da cidade de Santa Fé do Sul - SP, segundo um modelo linear de crescimento populacional e os modelos de Malthus e Verhulst. A modelagem empregada foi obtida através de Equações Diferenciais. Os dados da população atual foram determinados através do cálculo médio do crescimento anual da cidade no período de 2000 a 2010 e também uma projeção para os anos de 2020, 2030, 2040. Os autores concluíram que os resultados obtidos são próximos da realidade, o modelo de melhor projeção foi o crescimento logístico de Verhulst. Por meio desses modelos, (SANCHES; SOUSA, 2011) estimaram o quanto a população de uma cidade irá crescer em longo prazo. A partir destes estudos, a cidade poderá se organizar para ser capaz de suportar o crescimento populacional de uma forma organizada, isto é, o estudo do crescimento demográfico poderá ser útil para o planejamento e desenvolvimento futuro do município de Santa Fé do Sul.

No trabalho de (LIMA; VIEIRA, 2009) foi aplicada a modelagem matemática em um estudo sobre modelos clássicos de crescimento populacional. O trabalho realizado teve apenas fins teóricos, onde pretendia explicar as fases da modelagem matemática e analisar modelos clássicos da literatura, apresentados por Thomas Robert Malthus, Pierri-François

Verhulst e de Alfred James Lotka e Vito Volterra.

O artigo de (PUGENS; SILVA; FERNANDES, 2012) investiga as aplicações dos conceitos matemáticos apresentados e desenvolvidos nas disciplinas da área da Matemática Aplicada, sob a ótica do crescimento populacional. Os autores têm como ideia principal buscar um processo de investigação e compreender com maior profundidade as contribuições da matemática para a sociedade. Levando em consideração o fato do mesmo poder ser analisado, a partir dos conhecimentos científicos e contextualizado, na realidade do município de Osório no Rio Grande do Sul. Foi aplicado o Modelo de Malthus para o crescimento populacional onde compararam os resultados obtidos pelo modelo, com os dados estatísticos obtidos no IBGE, no período de 2001 a 2010. Os autores concluíram que os resultados são muito próximos dos dados fornecidos pelo IBGE.

No trabalho de (ALITOLEF, 2011) a ideia básica é mostrar como as equações diferenciais foram desenvolvidas ao longo destes três últimos séculos, bem como suas maiores contribuições para o progresso tecnológico. Foram feitas análises com dados populacionais registrados pelo IBGE, nos anos de 2001 e 2010, em três cidades do Estado de Rondônia: Porto Velho, a capital do Estado de Rondônia, Ji-Paraná e Ouro Preto do Oeste. Para o trabalho foi utilizado o modelo de crescimento e decrescimento populacional de Malthus. O autor conclui que, com base em um simples modelo, pode-se definir o crescimento e decrescimento populacional destes municípios em períodos distintos e de forma lógica.

Cumprе ressaltar que ao efetuar o estudo bibliográfico para a fundamentação teórica deste trabalho, não foram encontradas referências relacionadas à utilização das metodologias propostas, e nem ao menos do software wxMaxima, no estudo populacional de Rio Grande.

No próximo capítulo apresenta-se a fundamentação matemática necessária para a realização desse trabalho.

2 Fundamentação Matemática

Neste capítulo abordam-se os principais métodos que podem ser aplicados para estimar a população para anos futuros. Neste estudo, dirige-se a análise para os seguintes modelos: o Método dos Mínimos Quadrados: Ajuste Linear, Exponencial e Modelos Polinomiais (grau maior ou igual a dois), dentro da ótica numérica; Modelo Malthusiano e Modelo Logístico ou de Verhulst, dentro da ótica analítica. Pretende-se verificar qual método melhor se ajusta a esta pesquisa, segundo os dados obtidos junto ao Sindicato de Metalúrgicos de Rio Grande STIMMERG e à Fundação de Economia e Estatística - FEE.

2.1 Métodos Numéricos

Os Métodos Numéricos conduzem às soluções aproximadas de um modelo ou sistema exato.

2.1.1 Método dos Mínimos Quadrados

Definição 2.1.1. Método dos Mínimos Quadrados. O método dos mínimos quadrados, de acordo com a autora (MOSCHOUTIS, 2013) é uma técnica de otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados experimentais, isto é, determinar os parâmetros de uma específica função de ajustamento, minimizando o somatório dos quadrados dos resíduos.

Segundo (RUGGIERO; LOPES, 1996) dados os pontos $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_m, f(x_m))$ e as n funções $g_1(x), \dots, g_n(x)$ escolhidas de alguma forma. O objetivo é determinar os coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que a função $\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \dots + \alpha_n g_n(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$.

Seja $d_k = f(x_k) - \varphi(x_k)$ o desvio em x_k . Um conceito de proximidade é que o desvio d_k seja mínimo para todo $k = 1, 2, \dots, m$. O método dos mínimos quadrados consiste em escolher os α_j 's de tal forma que a soma dos quadrados dos desvios seja mínima. Visto que a soma $\sum_{k=1}^m d_k^2 = \sum_{k=1}^m (f(x_k) - \varphi(x_k))^2$ é mínima, tem-se que cada parcela $[f(x_k) - \varphi(x_k)]^2$ também é mínima.

Portanto, dentro do critério dos mínimos quadrados, os coeficientes α_k , que fazem com que $\varphi(x)$ se aproxime ao máximo de $f(x)$, são os que minimizam a função

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^m [f(x_k) - \varphi(x_k)]^2 = \sum_{k=1}^m [f(x_k) - \alpha_1 g_1(x_k) - \dots - \alpha_n g_n(x_k)]^2.$$

Para isto é necessário que as derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}$, $j = 1, \dots, n$, sejam nulas, resultando um sistema linear de n equações e n incógnitas (RUGGIERO; LOPES, 1996).

Em outras palavras, com esse método determina-se uma função $\varphi(x)$ de um tipo pré-estabelecido: uma reta (ajuste linear), uma exponencial (ajuste exponencial) ou um polinômio de grau maior ou igual a dois (ajuste polinomial), que melhor ajusta um conjunto de pontos ou uma função dada.

2.1.2 Ajuste Linear

Definição 2.1.2. Ajuste Linear. De acordo com (BARROSO et al., 1987), o modelo mais simples que relaciona duas variáveis x e y é a equação da reta

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (2.1)$$

Dados m pontos $(x_i, f(x_i)) = (x_i, y_i)$, determinam-se α_1 e α_2 de tal forma que a reta $\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ se aproxime do conjunto de pontos o máximo possível.

Neste caso, o desvio total desses pontos com relação a função $\varphi(x)$ terá a forma:

$$F = \sum_{i=1}^m d_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \varphi(x_i))^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_i)^2. \quad (2.2)$$

Observa-se pela equação (2.2) que F depende de α_1 e α_2 .

Para a reta ser próxima dos pontos dados, o desvio total F deve ser mínimo. Uma vez que F depende de α_1 e α_2 , as derivadas parciais $\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}$ e $\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}$ devem ser nulas:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = \sum_{i=1}^m [2(y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_i)(-1)] \quad (2.3)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = \sum_{i=1}^m [2(y_i - \alpha_1 - \alpha_2 x_i)(-x_i)]. \quad (2.4)$$

O sistema representado pelas equações (2.3) e (2.4), pode ser escrito como:

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^m (\alpha_2 x_i^2 + \alpha_1 x_i - x_i y_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^m (\alpha_2 x_i + \alpha_1 - y_i) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

ou

$$\begin{cases} \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m x_i y_i = 0 \\ \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m \alpha_1 - \sum_{i=1}^m y_i = 0 \end{cases}. \quad (2.6)$$

Como $\sum_{i=1}^m \alpha_1 = \underbrace{\alpha_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_1}_{m \text{ parcelas}} = m\alpha_1$ tem-se que α_1 e α_2 serão calculados resolvendo-se o sistema linear,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i y_i = \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m y_i = \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i + m\alpha_1 \end{cases}. \quad (2.7)$$

Resolvendo-se o sistema linear (2.7), são obtidos os valores de α_1 e α_2 e assim determina-se a função de ajuste:

$$\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x.$$

Resumindo-se, para determinar a reta que melhor se aproxima dos m pontos (x_i, y_i) , procede-se da seguinte maneira:

1. Calculam-se os quatro somatórios $\sum_{i=1}^m x_i$, $\sum_{i=1}^m y_i$, $\sum_{i=1}^m x_i^2$, $\sum_{i=1}^m x_i y_i$.
2. Aplica-se em (2.7) e calculam-se os coeficientes α_1 e α_2 . Com isso obtém-se a aproximação linear da reta de equação (2.1).

2.1.3 Ajuste Exponencial

Definição 2.1.3. Ajuste Exponencial. Segundo (MOSCHOUTIS, 2013), faz-se o ajuste de pontos da forma (x_i, p_i) a uma exponencial do tipo $p = \alpha e^{bt}$. Essa função pode ser ajustada através da transformação:

$$\ln p = \ln(\alpha e^{bt}) = \ln \alpha + bt. \quad (2.8)$$

Fazendo $P = \ln p$ e $a = \ln \alpha$ reduz-se o problema de ajustar a tabela de pontos (x_i, p_i) , referente a uma exponencial, ao ajuste linear de $P = a + bt$ do conjunto de pontos (x_i, P_i) , onde $P_i = \ln p_i$. Dessa forma, repete-se o procedimento descrito na seção 2.1.2 e obtém-se o ajuste.

2.1.4 Ajuste Polinomial

Definição 2.1.4. Ajuste Polinomial. Segundo (BARROSO et al., 1987), um caso especial de ajuste linear múltiplo para $\varphi(x) = \alpha_0 g_0(x) + \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \cdots + \alpha_m g_m(x)$, ocorre quando $g_0(x) = 1, g_1(x) = x, g_2(x) = x^2, \dots, g_m(x) = x^m$. Deste modo, tem-se:

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_m x^m, \quad (2.9)$$

então, a partir do conjunto de dados $(x_i, f(x_i))$, a função $Q(d_k)$ definida a partir do desvio $d_k = f(x_k) - \varphi(x_k)$, pode ser escrita em termos dos coeficientes α_j como

$$Q(\alpha_0, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^m \alpha_j x_i^j \right)^2. \quad (2.10)$$

No ponto em que Q é mínimo,

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} = 0,$$

para $k = 0, 1, 2, \dots, m$.

Isto implica as equações

$$2 \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) - \sum_{j=0}^m \alpha_j x_i^j \right) x_i^k = 0, \quad (2.11)$$

para cada $k = 0, 1, 2, \dots, m$, pois

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} \left(\sum_{j=0}^m \alpha_j x_i^j \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} (\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \cdots + \alpha_k x_i^k + \cdots + \alpha_m x_i^m) = x_i^k.$$

A equação (2.11) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m \alpha_j x_i^{j+k} &= \sum_{i=1}^n f(x_i) x_i^k \\ \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=1}^n x_i^{j+k} \right) \alpha_j &= \sum_{i=1}^n f(x_i) x_i^k, \end{aligned} \quad (2.12)$$

para cada $k = 0, 1, \dots, m$. Ou seja, um sistema de $m+1$ equações lineares cujas incógnitas são os $m+1$ coeficientes α_i do polinômio $\varphi(x)$.

O sistema de equações (2.12) pode ser convenientemente descrito em notação matricial como

$$X^T X \alpha = X^T f, \quad (2.13)$$

onde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$X^T \text{ é a sua transposta, } \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \text{ e } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

As equações dadas pelo sistema (2.13) são denominadas **equações normais**. Essa nomenclatura deve-se ao seguinte fato: o sistema (2.13) pode ser reescrito como

$$X^T (X \alpha - f) = 0, \quad (2.15)$$

onde as componentes do vetor entre parênteses, $X \alpha - f$, são chamadas de resíduos da aproximação e, segundo a equação (2.15) esse vetor é normal (ortogonal) aos vetores

formados pelos elementos das linhas da matriz X^T que são da forma: $\begin{pmatrix} x_1^l \\ x_2^l \\ \vdots \\ x_n^l \end{pmatrix}$ para

$l = 0, 1, 2, \dots, m$.

2.2 Métodos Analíticos

Os métodos analíticos compreendem a resolução de equações diferenciais que modelam um fenômeno. Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é dita ser uma Equação Diferencial (ED) e são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade (ZILL; CULLEN, 2009).

2.2.1 Modelo Malthusiano

Em 1798 foi publicado um ensaio anônimo que se transformou em um dos trabalhos mais discutidos dos tempos modernos. Seu título era **Um Ensaio sobre o Princípio**

da População, da Maneira que esta Afeta a Mellhoria Futura da Sociedade, com Observações sobre as Especulações de Mr. Godwin, M. Condorcet e Outros Escritores. O trabalho foi escrito por Thomas Robert Malthus, nascido em 1776 e ministro ordenado da Igreja Anglicana (RIMA, 1987).

Malthus defende seu ponto de vista de que o aumento potencial da população, quando não contido, é uma proporção geométrica, ao passo que a subsistência só pode aumentar em proporção aritmética (RIMA, 1987).

Definição 2.2.1. Modelo Malthusiano. Segundo os autores (ZILL; CULLEN, 2009) e (TAVONI, 2013), a ideia do modelo Malthusiano corresponde à consideração de que a taxa na qual a população de um país cresce, em certo tempo é proporcional à população total do país naquele tempo. Em outras palavras, quanto mais pessoas existem em um tempo t , mais existirão no futuro.

Seja P o número de indivíduos em uma população. Este número é dependente do tempo (BASSANEZI, 2002), então esta relação pode ser escrita como:

$$P = P(t). \quad (2.16)$$

Em termos matemáticos, $P(t)$ corresponde à população total em um tempo t e k é a taxa de crescimento. Assim,

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = k. \quad (2.17)$$

A equação (2.17) indica que a variação relativa da população é constante ou, em outras palavras, que a variação da população é proporcional à própria população em cada período de tempo.

O modelo discreto (tempo discreto) de Malthus é dado por

$$P(t+1) - P(t) = kP(t), \quad (2.18)$$

$$P(t+1) = kP(t) + P(t).$$

Considerando dada a população inicial $P(0) = P_0$, obtém-se a expressão:

$$\begin{cases} P(t+1) = (1+k)P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}, \quad (2.19)$$

ou seja,

$$P(t) = (1 + k)^t P_0. \quad (2.20)$$

A constante k (BASSANEZI, 2002) vai ser uma média entre todos os valores e pode ser obtida, pela equação (2.21)

$$(1 + k)^t = \frac{P(t)}{P_0} \Rightarrow k = \sqrt[t]{\frac{P(t)}{P_0}} - 1, \quad (2.21)$$

onde $P(t)$ é a taxa de crescimento da população.

A equação (2.20) pode ser reescrita na forma exponencial como,

$$P(t) = P_0 e^{\ln(1+k)t}. \quad (2.22)$$

Pode-se comparar a solução do modelo de Malthus discreto (2.17) com a solução do modelo contínuo correspondente, considerando-se que

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}. \quad (2.23)$$

Tomando o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$, tem-se a derivada da função a qual satisfaz a equação (2.24). Assim, pode-se escrever o modelo contínuo como:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = k P(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}. \quad (2.24)$$

Dessa forma, se k é positiva a população crescerá e se k for negativa a população diminuirá (ela pode diminuir por um tempo sem ir para zero).

A equação (2.24) é uma equação diferencial ordinária de variáveis separáveis. Para determinar uma função população que satisfaça à equação, primeiramente, deve-se separar as variáveis

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = k dt. \quad (2.25)$$

Integrando-se,

$$\int \frac{dP(t)}{P(t)} = \int k dt, \quad (2.26)$$

$$\ln |P(t)| + \ln C_2 = kt + \ln C_1, \quad (2.27)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. Logo:

$$\ln |P(t)| = kt + \ln C, \quad (2.28)$$

onde $\ln C = \ln C_1 - \ln C_2$.

Aplicando-se as propriedades dos logaritmos usuais à equação (2.28), obtém-se

$$e^{\ln |P(t)|} = e^{kt + \ln C}, \quad (2.29)$$

$$P(t) = Ce^{kt}. \quad (2.30)$$

Quando o tempo for zero ($t = 0$), a população inicial será

$$P_0 = Ce^{k \cdot 0} = C. \quad (2.31)$$

Substituindo (2.31) na equação (2.30), obtém-se a solução de (2.24),

$$P(t) = P_0 e^{kt}. \quad (2.32)$$

2.2.2 Modelo de Verhulst

Segundo o autor (TAVONI, 2013) Pierre-François Verhulst nasceu em Bruxelas no ano de 1804, obtendo o grau de doutor em Matemática pela Universidade de Ghent no ano de 1825. Introduziu a equação de crescimento logístico onde a população cresce até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar e não cresce indefinidamente como Malthus propôs em seu modelo.

Definição 2.2.2. Modelo de Verhulst. O modelo de Verhulst, onde P_∞ é chamado de valor limite da população, ou capacidade suporte, é essencialmente, o modelo de Malthus modificado

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = kP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right) \\ P(0) = P_0, k > 0 \end{cases}. \quad (2.33)$$

Observa-se que $P(t) \equiv 0$ e $P(t) \equiv P_\infty$ são soluções da equação diferencial dada em (2.33). A solução analítica de (2.33) é obtida por integração após a separação das variáveis (MOSCHOUTIS, 2013), isto é,

$$\int \frac{dP(t)}{P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right)} = \int k dt. \quad (2.34)$$

Usando a técnica das frações parciais para resolver a integral do primeiro membro, da equação (2.34), obtém-se

$$\int \frac{1}{P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right)} dP(t) = \int \frac{A}{P(t)} dP(t) + \int \frac{B}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}} dP(t),$$

Reescrever

$$\frac{1}{P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right)} = \frac{A}{P(t)} + \frac{B}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}}$$

Aplicando o *mmc*:

$$\frac{1}{\cancel{P(t)} \left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right)} = \frac{A \left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right) + BP(t)}{\cancel{P(t)} \left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right)},$$

Igualando os termos semelhantes:

$$1 = A - \frac{AP(t)}{P_\infty} + BP(t)$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ \left(-\frac{A}{P_\infty} + B\right) P(t) = 0P(t) \end{cases}$$

$$-\frac{A}{P_\infty} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{P_\infty},$$

Resolvendo as integrais:

$$\int \frac{1}{P(t)} dP(t) + \int \frac{\frac{1}{P_\infty}}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}} dP(t),$$

$$\ln |P(t)| - \ln \left| 1 - \frac{P(t)}{P_\infty} \right| + c,$$

$$\ln |P(t)| - \ln \left| 1 - \frac{P(t)}{P_\infty} \right| = kt + c,$$

Aplicando as propriedades dos logaritmos, tem-se

$$\ln \left| \frac{P(t)}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}} \right| = kt + c. \quad (2.35)$$

Aplicando a condição inicial $t = 0$, $P(0) = P_0$, pode-se determinar o valor da constante de integração c :

$$\begin{aligned} c &= \ln \left| \frac{P(0)}{1 - \frac{P(0)}{P_\infty}} \right|, \\ c &= \ln \left| \frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} \right|. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Substituindo a equação (2.36) em (2.35), obtém-se

$$\ln \left| \frac{P(t) P_\infty}{P_\infty - P(t)} \right| = kt + \ln \left| \frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} \right|, \quad (2.37)$$

aplicando as propriedades dos logartimos, tem-se

$$\ln \left| \frac{P(t)(P_\infty - P_0)}{P_0(P_\infty - P(t))} \right| = kt$$

ou seja,

$$\frac{P(t)}{P_\infty - P(t)} = \frac{P_0}{P_\infty - P_0} e^{kt} \Rightarrow P(t) = \frac{(P_0 P_\infty - P(t) P_0) e^{kt}}{P_\infty - P_0}.$$

Explicitando $P(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{P_\infty}{\left(\frac{P_\infty}{P_0} - 1\right) e^{-kt} + 1}, \\ P(t) &= \frac{P_\infty P_0}{(P_\infty - P_0) e^{-kt} + P_0}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

A equação (2.38) é denominada equação logística.

No próximo capítulo apresenta-se os resultados e discussões desse trabalho.

3 Resultados Numéricos e Discussão

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos com a implementação dos Métodos Numéricos e Analíticos utilizando o software wxMaxima.

3.1 *Software wxMaxima*

O wxMaxima é uma interface para o sistema de álgebra computacional Maxima que é um descendente de Macsyma, desenvolvido no final da década de 1960 no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT).

O Maxima é um sistema para a manipulação de expressões simbólicas e numéricas, incluindo diferenciação, integração, séries de Taylor, transformações de Laplace, equações diferenciais ordinárias, sistemas de equações lineares, polinômios, conjuntos, listas, vetores, matrizes e tensores. Esse software produz resultados numéricos de alta precisão usando frações exatas, inteiros de precisão arbitrária e números de ponto flutuante de precisão variável. O Maxima pode representar graficamente funções e dados em duas e três dimensões.

Neste trabalho utiliza-se o wxMaxima para se obter os resultados numéricos e gráficos, que descrevem o melhor ajuste para os dados. A versão do wxMaxima utilizada é a 16.04.2.

Observação: Os comandos utilizados ao longo desse trabalho estão disponíveis no Anexo A.

Nas seções seguintes serão apresentados os resultados obtidos com o estudo do crescimento populacional da cidade de Rio Grande e dos trabalhadores do Polo Naval deste município.

Para uma melhor apresentação dos dados obtidos, os resultados estão organizados da seguinte forma:

1. Na seção 3.2, são apresentadas as modelagens realizadas para a população de Rio Grande.
2. Para estudar a população de trabalhadores do Polo Naval, foram usadas as situações, considerando:

Situação A: Os dados do STIMMERG entre os anos de 2005 à 2015 (Seção 3.3).

Situação B: Os anos de 2016 e 2017, com informações obtidas informalmente no STIMMERG (Seção 3.4).

Situação C: Que o setor metalúrgico mantivesse um fluxo contínuo de plataforma e navios, entre os anos de 2005 e 2012 (Seção 3.5).

3.2 Estudo sobre a população da Cidade de Rio Grande

Nesta seção, apresentam-se os resultados obtidos após a implementação da metodologia proposta, tendo como premissa as formulações descritas no Capítulo 2.

Nessa etapa do trabalho é apresentado o estudo realizado com os dados da população de Rio Grande coletados através da Fundação de Economia e Estatística - FEE, onde será estimada a população para anos futuros. A Tabela 1 apresenta a população do mesmo entre os anos de 2005 à 2015.

Tabela 1 – População de Rio Grande

Ano	Tempo	População
2005	0	196482
2006	1	197974
2007	2	199409
2008	3	200878
2009	4	202218
2010	5	203558
2011	6	205604
2012	7	206616
2013	8	209223
2014	9	211410
2015	10	213166

Fonte: FEE

A Figura 3 apresenta o diagrama de dispersão para os dados referentes ao número de habitantes da cidade de Rio Grande. Para relacionar o Ano t e a População P , foi considerado o ano inicial, o qual é chamado ano zero ou ainda tempo zero ($t = 0$), o ano de 2005. Para o ano final ou tempo final, ($t = 10$), o ano de 2015. A escolha do ano inicial foi feita para fins comparativos entre as populações estudadas no presente trabalho.

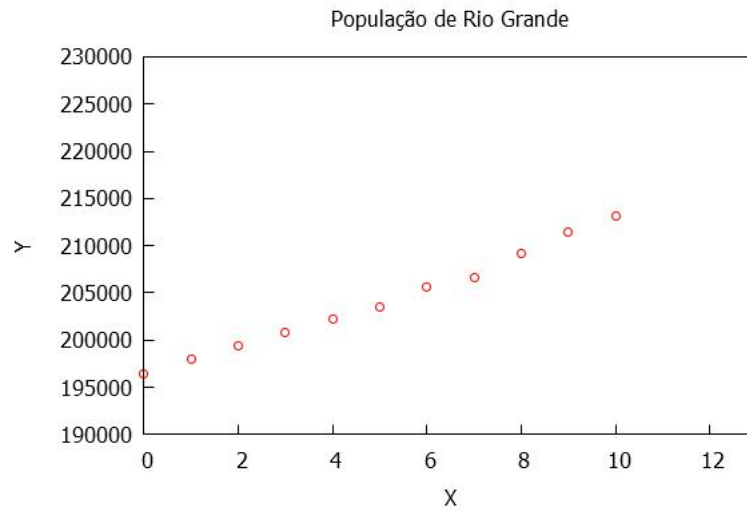


Figura 3 – Diagrama de dispersão para os dados da população de Rio Grande no wxMaxima

3.2.1 Ajuste Linear

Seja $\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ a função que ajusta os dados. Os parâmetros α_1 e α_2 constituem a solução do sistema:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i y_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m y_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i + m \alpha_1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

A partir de agora assume-se a variável x_i para indicar o tempo, e a variável y_i para indicar a população.

Tabela 2 – Coeficientes para o cálculo empregando o ajuste linear

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
0	0	196482	0	0
1	1	197974	197974	1
2	2	199409	398818	4
3	3	200878	602634	9
4	4	202218	808872	16
5	5	203558	1017790	25
6	6	205604	1233624	36
7	7	206616	1446312	49
8	8	209223	1673784	64
9	9	211410	1902690	81
10	10	213166	2131660	100
\sum	55	2246538	11414158	385

Utilizando os dados da Tabela 2, é possível chegar a:

$$\begin{cases} 385\alpha_2 + 55\alpha_1 = 11414158 \\ 55\alpha_2 + 11\alpha_1 = 2246538 \end{cases} \quad (3.2)$$

Após os cálculos algébricos, chega-se a conclusão que:

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1649,7090 \\ \alpha_1 = 195982,1818 \end{cases} \quad (3.3)$$

Esses resultados foram também obtidos utilizando-se o wxMaxima:

```
(%i1) solve([385*x+55*y=11414158,55*x+11*y=2246538],[x,y]),numer;
      [[x = 1649.709090909091, y = 195982.1818181818]] (%o1)
```

Dessa forma tem-se que o ajuste linear que melhor se ajusta aos dados fornecidos é dado pela função:

$$\varphi(x) = 1649,7090x + 195982,1818. \quad (3.4)$$

Observa-se que a partir dos dados reais (obtidos através da FEE) é possível fazer uma aproximação com o uso do software wxMaxima, o qual permite uma melhor representação gráfica dos modelos. Na Figura 4 os pontos vermelhos (representados por círculos) correspondem à população de Rio Grande, enquanto que a curva esboçada em azul corresponde ao gráfico do ajuste linear determinado pela função representada na equação (3.4).

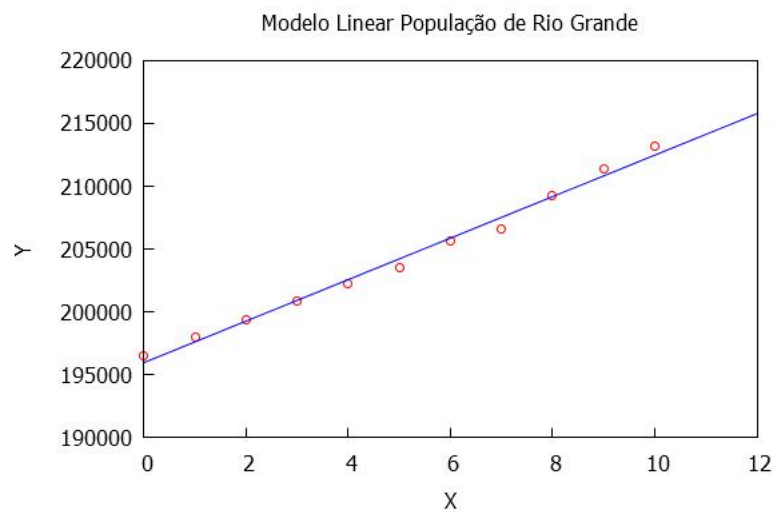


Figura 4 – Ajuste Linear da população de Rio Grande no wxMaxima

Pode-se observar que a função que representa o ajuste linear é uma solução aproximada e intersecciona alguns pontos dos dados reais. Entretanto, o modelo não é bom o suficiente para modelar dados demográficos, uma vez que esta curva é ilimitada superiormente. Toda população tende a se estabilizar depois de certo intervalo de tempo. No entanto, o procedimento de ajuste estudado nesta seção serve para fins de comparação com os modelos que serão apresentados nas próximas subseções.

3.2.2 Ajuste Exponencial

Inicia-se o estudo em questão, aplicando o ajuste linear nas variáveis α_1 e α_2 , como visto na seção 2.1.3 à variável $P_i = \ln p_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i p_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m p_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i + m\alpha_1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tabela 3 – Cálculo para o ajuste exponencial

i	x_i	y_i	$\ln p_i$	$x_i \ln p_i$	x_i^2
0	0	196482	12,1883	0	0
1	1	197974	12,1958	12,1958	1
2	2	199409	12,2031	24,4062	4
3	3	200878	12,2104	36,6313	9
4	4	202218	12,2171	48,8684	16
5	5	203558	12,2237	61,1185	25
6	6	205604	12,2337	73,4022	36
7	7	206616	12,2386	85,6703	49
8	8	209223	12,2511	98,0092	64
9	9	211410	12,2615	110,3539	81
10	10	213166	12,2698	122,6982	100
Σ	55	2246538	134,4934	673,3544	385

Utilizando os dados da Tabela 3, tem-se que:

$$\begin{cases} 385\alpha_2 + 55\alpha_1 = 673,3544 \\ 55\alpha_2 + 11\alpha_1 = 134,4934 \end{cases} \quad (3.6)$$

Resolvendo o sistema, através do software wxMaxima, obtém-se:

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0,0081 \\ \alpha_1 = 12,1863 \end{cases} \quad (3.7)$$

Ou seja, aproximadamente,

```
(%i1) solve([385*x+55*y=673.3544,55*x+11*y=134.4934],[x,y]),numer;
```

```
[[x = 0.008067272727272727, y = 12.18633636363636]] (%o1)
```

Note que $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = b$ na função $P = a + bt$ como, por definição $a = \ln \alpha$, então $\alpha = \ln a \Rightarrow \alpha = e^a \Rightarrow e^{12,1863} \Rightarrow a = 196084,3102$. Assim tem-se que o ajuste exponencial é determinado pela função:

$$\varphi(x) = 196091,4407e^{0.0081x}. \quad (3.8)$$

A função (3.8) está representada na Figura 5. Ao determinar a função que melhor ajusta o modelo exponencial, pode-se obter uma aproximação pelo wxMaxima. Observou-se que o wxMaxima não apresenta um comando utilizando o método dos mínimos quadrados para o ajuste exponencial, entretanto apresenta um algoritmo *lbfgs* que usa uma aproximação de baixa classificação da inversa da matriz Hessiana. A aproximação obtida através do algoritmo *L - lbfgs* pelo software wxMaxima é a função:

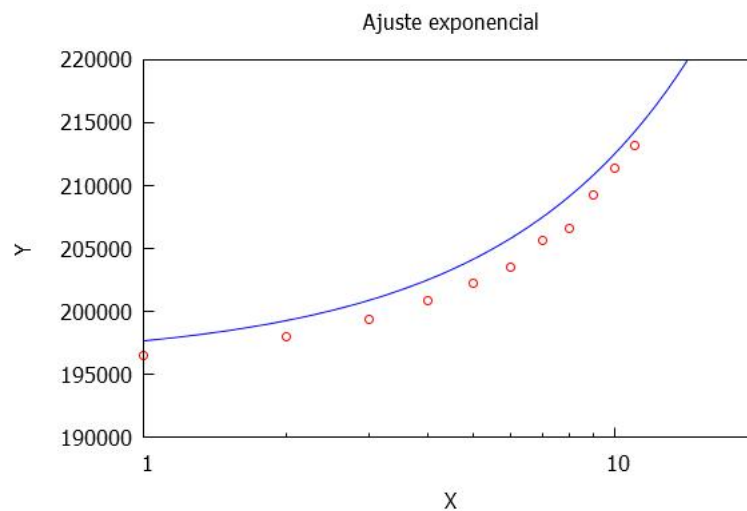


Figura 5 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.8)

Observa-se que o gráfico produzido pelo wxMaxima, apresenta um deslocamento na origem, o que não descreve o ajuste esperado.

```
-> load(lsquares);
```

```
(%o5)
```

```
C:\maxima-5.38.1\share\maxima\5.38.1_5_gdf93b7b_dirty\share\lsquares\lsquares.mac
```

```
-> M:matrix( [1,196482], [2,197974], [3,199409], [4,200878], [5,202218], [6,203558], [7,205604],
[8,206616], [9,209223], [10,211410], [11,213166]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 196482 \\ 2 & 197974 \\ 3 & 199409 \\ 4 & 200878 \\ 5 & 202218 \\ 6 & 203558 \\ 7 & 205604 \\ 8 & 206616 \\ 9 & 209223 \\ 10 & 211410 \\ 11 & 213166 \end{pmatrix} \quad (M)$$

```
-> load(lbfgs);
```

```
(%o7)
```

```
C:\maxima-5.38.1\share\maxima\5.38.1_5_gdf93b7b_dirty\share\lbfgs\lbfgs.mac
```

```
-> mse:lsquares_mse(M,[x,y],y=a*exp(b*x));
```

$$\frac{\sum_{i=1}^{11} \left(M_{i,2} - a e^{b M_{i,1}} \right)^2}{11} \quad (\text{mse})$$

```
-> lbfgs(mse,'[a,b],[213166/%e,1.0/11.0],1e-4,[-1,0]);
```

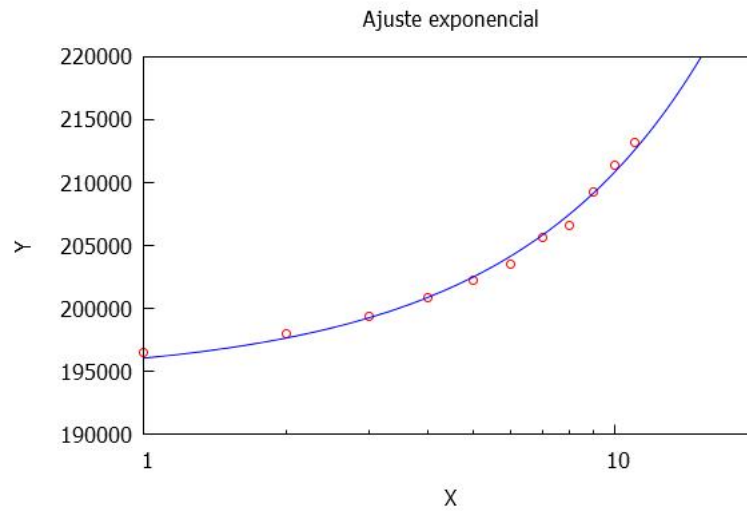
$$[a = 194488.4012351644, b = 0.00809166123405568] \quad (\%o10)$$

```
-> y(x):=194488.4012351644*exp(0.00809166123405568*x);
```

$$y(x) := 194488.4012351644 \exp(0.00809166123405568x) \quad (\%o11)$$

$$\varphi(x) = 194488,4012e^{0.0081x}. \quad (3.9)$$

Assim através da função (3.9), pode-se obter o gráfico (Figura 6).

Figura 6 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.9)

Na Tabela 4, é apresentada a estimativa para anos futuros da população de Rio Grande, através das funções (3.8) e (3.9).

Tabela 4 – Estimativa da população de Rio Grande

Ano	População Real	$\varphi(x) = 196091,4407e^{0.0081x}$	$\varphi(x) = 194488,4012e^{0.0081x}$
2011	205604	205857	204174
2012	206616	207531	205835
2013	209223	209219	207509
2014	211410	210921	209196
2015	213166	212636	210898
2016	214532	214365	212613
2020	—	221424	219614

3.2.3 Ajuste Polinomial

O estudo populacional entre os anos propostos é representado por um polinômio de décimo grau, pois entre todos os graus dos polinômios estudados foi o que melhor se ajustou ao estudo. Essa afirmação deve-se ao fato de que o polinômio de grau dez apresenta o menor erro residual (Tabela 5). Isso pode ser visualizado na Figura 8.

Definindo-se por φ_n ($n \in \mathbb{N}$), o polinômio de grau n que interpola $n + 1$ pontos, então a função (3.11) é o polinômio que interpola os dados da Tabela 1 que é composta por 11 dados, e denotamos $n := 10$.

Considerando os polinômios para $n < 10$, em particular $n \in \{2, 6, 9\}$:

$$\varphi_2(x) = 108,1002x^2 + 92,1794x + 582.8671$$

$$\begin{aligned}\varphi_6(x) &= 2,0249x^6 - 67,6626x^5 + 813,1107x^4 - 4235,1786x^3 \\ &+ 9024,6124x^2 - 5023,5953x + 299,2698\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_9(x) &= 0,3665x^9 - 15,3054x^8 + 264,6245x^7 - 2451,8238x^6 + 13149,1244x^5 \\ &- 41062,6735x^4 + 71140,0931x^3 - 60841,3867x^2 + 20444,7999x + 247,4709\end{aligned}$$

Define-se ainda por ϵ_n o erro residual referente a φ_n para cada $n \in \mathbb{N}$, e nesse caso $n \leq 10$.

Na Tabela 5 é feita a análise do erro residual que define o melhor modelo polinomial. Quanto mais próximo de 0 (zero) for o valor de ϵ_n , melhor é o ajuste.

Tabela 5 – Erro residual dos Polinômios

n	ϵ_n
2	$1,377376435685527 \cdot 10^7$
6	$4,207197169140837 \cdot 10^6$
9	$1,074255000228874 \cdot 10^5$
10	$4,149415269549128 \cdot 10^{-13}$

Neste caso tem-se que, o erro residual do polinômio que melhor ajusta os dados é $\epsilon_{10} = 0.000000000000041$.

Aplicando a teoria matemática, seção 2.1.4, para determinar um polinômio qualquer, efetuam-se os cálculos matriciais necessários para chegar à equação (3.10). A partir dos dados tem-se:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & \dots & 1024 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & \dots & 59049 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & \dots & 1048576 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & \dots & 9765625 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & \dots & 60466176 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & \dots & 282475249 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & \dots & 1073741824 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & \dots & 3486784401 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 & \dots & 10000000000 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 196482 \\ 197974 \\ 199409 \\ 200878 \\ 202218 \\ 203558 \\ 205604 \\ 206616 \\ 209223 \\ 211410 \\ 213166 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \end{pmatrix}.$$

Efetuada a multiplicação obtém-se:

$$X^T f = \begin{pmatrix} 2246538 \\ 11414158 \\ 80484960 \\ 635289472 \\ 5336897412 \\ 46625922568 \\ 418433600820 \\ 3828994181992 \\ 35557859251092 \\ 334016357388328 \\ 3166460547628980 \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema $X^T X \alpha = X^T f$ será:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 196482 \\ -21901.2440 \\ 65117.6117 \\ -72630.2423 \\ 43382.6784 \\ -15490.7217 \\ 3461.6144 \\ -487.7681 \\ 42.0537 \\ -2.0237 \\ 0.0416 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Obtendo-se assim a expressão de décimo grau, que melhor modela os dados:

$$\begin{aligned} \varphi_{10}(x) = & 0,0416x^{10} - 2,0237x^9 + 42,0537x^8 - 487,7681x^7 + 3461,6144x^6 - 15490,7217x^5 \\ & + 43382,6784x^4 - 72630,2423x^3 + 65117,6117x^2 - 21901,2440x + 196482. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim pode-se analisar a representação gráfica do modelo polinomial conforme a função (3.11).

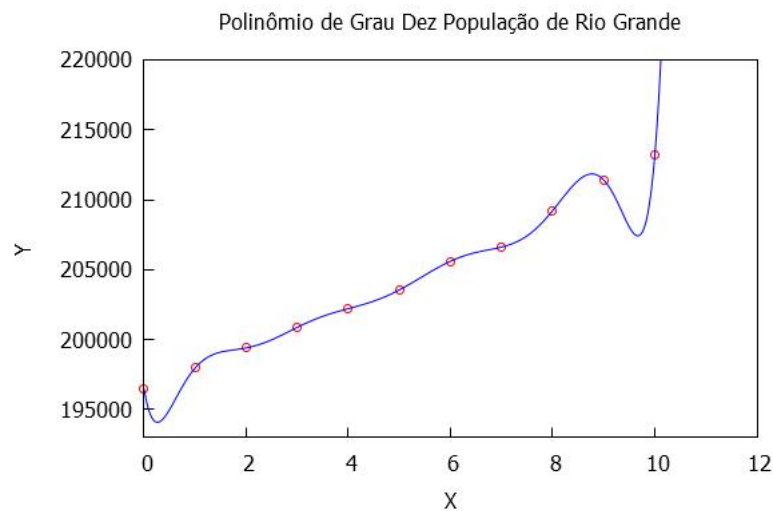


Figura 7 – Modelo Polinomial para População de Rio Grande

A partir da Figura 7 pode-se verificar que o polinômio de décimo grau é o que melhor se ajusta ao nosso modelo. Na Figura 8 são ilustrados gráficos de polinômios de graus diferentes estudados durante a modelagem.

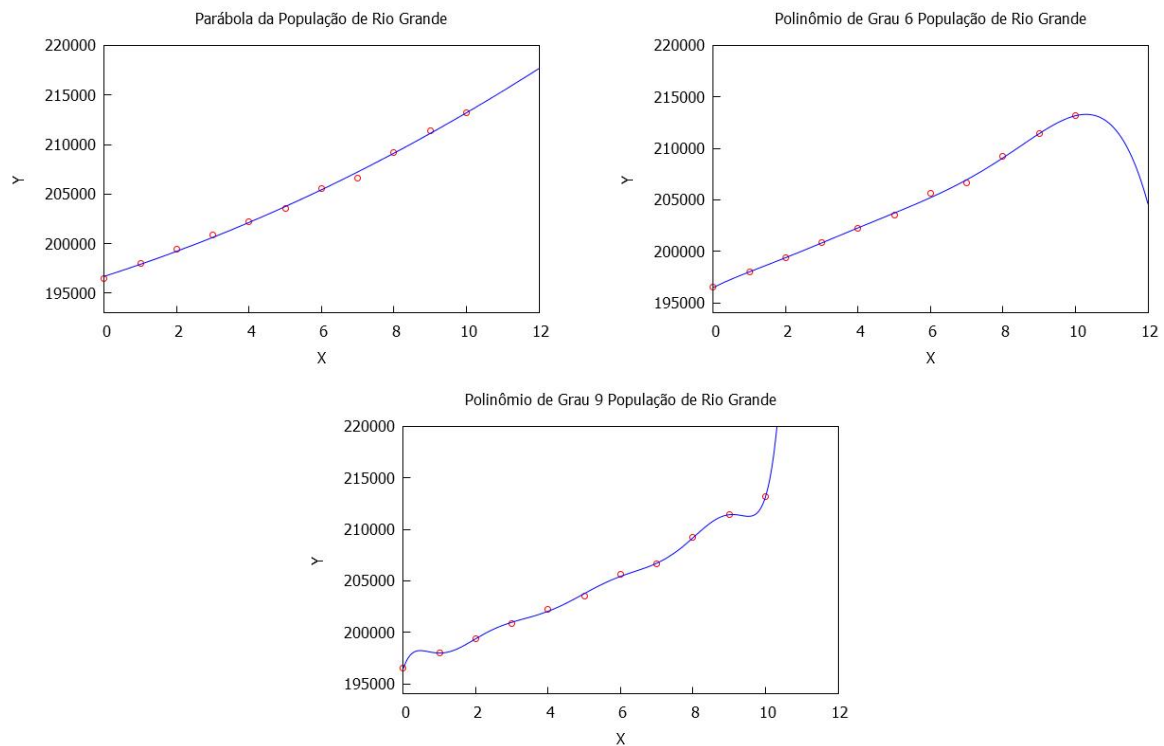


Figura 8 – Conjunto de figuras dos polinômios de grau 2, 6 e 9

Na Tabela 6 é apresentada uma estimativa para a população de Rio Grande. Observa-se que apesar do polinômio de grau 10 ser o que melhor ajusta os pontos, ele não pode ser utilizado para estimar a população do município de Rio Grande, pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{10}(x) = +\infty$.

Tabela 6 – Análise da população de Rio Grande para os polinômios de grau 2, 6, 9 e 10.

Ano	População Real	$\varphi_2(x)$	$\varphi_6(x)$	$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$
2011	205604	205446	205218	205432	205604
2012	206616	207240	206957	206714	206616
2013	209223	209136	209080	209186	209223
2014	211410	211119	211434	211418	211410
2015	213166	213204	213166	213165	213166

3.2.4 Modelo de Malthus

Nesta seção obtém-se a modelagem matemática para o crescimento populacional de Rio Grande aplicando-se o modelo Malthusiano Discreto.

Utilizando os dados da Tabela 1 é possível calcular a taxa de crescimento média (relativa) tomando por base a população inicial $P_0 = 196482$ e $P_{10} = 213166$, onde k é

dada pela equação (2.21). Substituindo os dados, obtém-se:

$$k = \sqrt[10]{\frac{213166}{196482}} - 1 \Rightarrow k = 0,008183340053934396, \quad (3.12)$$

o que nos permite afirmar que a população de Rio Grande, cresceu a uma taxa média de, 0,8183% ao ano nestes dez anos.

Dessa forma aplicando-se a equação (2.22), a população segundo o modelo Malthusiano Discreto, é dada por

$$P_t = 196482e^{\ln(1,008183)t}. \quad (3.13)$$

Após desenvolver os cálculos através do software wxMaxima assumindo-se a função (3.13), para determinar a população de Rio Grande entre os anos de 2005 e 2015, obtém-se a Tabela 7.

Tabela 7 – Modelo Populacional da Cidade de Rio Grande Modelo Malthusiano

Ano	População Real	Modelo Malthus	Erro Percentual Relativo
2005	196482	196482	—
2006	197974	198089	0,058%
2007	199409	199710	0,15%
2008	200878	201345	0,23%
2009	202218	202992	0,38%
2010	203558	204654	0,53%
2011	205604	206328	0,35%
2012	206616	208017	0,67%
2013	209223	209719	0,23%
2014	211410	211435	0,01%
2015	213166	213165	$4,7 \times 10^{-4} \%$

Na Figura 9, representa-se um gráfico obtido a partir do modelo Malthusiano Discreto e os dados referentes à população de Rio Grande. Observa-se que a curva apresenta um comportamento semelhante ao ajuste exponencial. A partir da Tabela 7 conclui-se que o maior percentual ocorre para o ano de 2015. Entretanto é um percentual inferior à 1%.

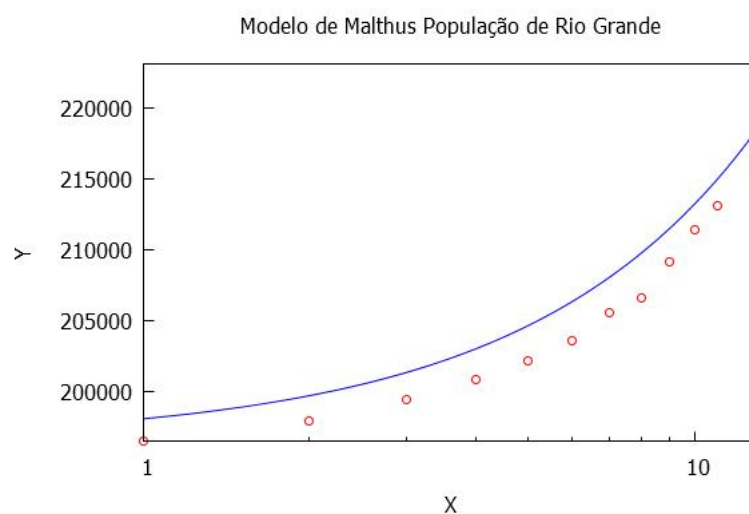


Figura 9 – Modelo Malthusiano para População de Rio Grande

Pode-se perceber que o mesmo problema ocorrido na função exponencial acontece no modelo malthusiano, apresentando assim um deslocamento na origem.

3.2.5 Modelo Logístico ou Verhulst

Através do modelo Logístico ou de Verhulst é possível empregar a metodologia proposta.

A estimativa da taxa de crescimento foi feita considerando-se o crescimento relativo em cada ano, isto é, comparando-se o acréscimo do número de indivíduos em relação à população anterior, conforme os valores mostrados na Tabela 8.

Tabela 8 – Taxa de crescimento anual da população de Rio Grande

i	População Real	Crescimento relativo
0	196482	0,007593
1	197974	0,007248
2	199409	0,007366
3	200878	0,006670
4	202218	0,006626
5	203558	0,010051
6	205604	0,004922
7	206616	0,012617
8	209223	0,010452
9	211410	0,008306
10	213166	0,081851

Para estimar o valor-limite para a população de Rio Grande, utilizou-se o método de Ford-Walford (BASSANEZI, 2002). Para que este método forneça uma boa estimativa do valor de P_∞ , é necessário que sejam conhecidos níveis populacionais, não do início do processo (onde o modelo funciona como o modelo exponencial), mas valores populacionais do período no qual a taxa de crescimento já começou a diminuir. Observando-se a Tabela 8, verificou-se que isto ocorre a partir de 2012 ($t = 7$).

Basicamente, este método supõe que, uma vez em equilíbrio, a população não varia mais, isto é $P_{t+1} = P_t$. Assim, a estimativa deste valor-limite pode ser obtida relacionando os valores das populações nos instantes t e $t + 1$. A partir dos pontos obtidos, ajusta-se uma reta que descreve como as populações consecutivas estão relacionadas $P_{t+1} = f(P_t) = \alpha_2 x + \alpha_1$. Para determinar o valor de equilíbrio, basta determinar a intersecção desta reta com a bissetriz, uma vez supondo que, no valor-limite, a população não varia, isto é $P_{t+1} = P_t$ (LEITE; SILVA; SOUSA, 2011).

Assim, na estimativa do valor de P_∞ para este modelo, considerou-se os valores populacionais de 2007 a 2009, como mostra a Tabela 9.

Tabela 9 – Valores utilizados no método de Ford-Walford

i	P_t	P_{t+1}
7	206616	209223
8	209223	211410
9	211410	213166

Fazendo-se o ajuste linear, obtém-se:

$$\varphi(x) = 0,8230x + 39190, \quad (3.14)$$

A partir da equação (3.14) calcula-se P_∞ (MOSCHOUTIS, 2013).

$$P_\infty = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}. \quad (3.15)$$

Substituindo os valores da função (3.14), obtém-se o valor-limite da população.

$$P_\infty = \frac{39190}{1 - 0,8230} \Rightarrow P_\infty = 221419. \quad (3.16)$$

Dessa forma tem-se que $P_\infty = 221419$, $P_0 = 196482$ e $k = 0,008183$, substituindo os valores na equação (2.38), tem-se que:

$$P(t) = \frac{221419 \times 196482}{(221419 - 196482)e^{-0,008183t} + 196482}.$$

$$P(t) = \frac{43504780066}{34035 e^{-0,008183t} + 196482}. \quad (3.17)$$

Na Tabela 10 apresentam-se as estimativas da população para anos futuros, até o ano de 2030.

Tabela 10 – Estimativa dos modelos comparados a População Real de Rio Grande

Ano	População Real	A.L	A.E	M.M	M.V
2005	196482	195982	197680	196482	196482
2006	197974	197632	199281	198089	196663
2007	199409	199282	200895	199710	196842
2008	200878	200931	202522	201345	197020
2009	202218	202581	204163	202992	197197
2010	203558	204231	205816	204654	197373
2011	205604	205880	207483	206328	197548
2012	206616	207530	209164	208017	197722
2013	209223	209180	210858	209719	197894
2014	211410	210830	212566	211435	198066
2015	213166	212479	214288	213165	198236
2016	214532	214129	216024	214910	198405
2020	—	220728	223108	222032	199072
2025	—	228976	232292	231267	199880
2030	—	237224	241853	240886	200663

A.L = Ajuste Linear, A.E = Ajuste Exponencial, M.M = Modelo de Malthus, M.V = Modelo de Verhulst.

Os modelos estudados mostram resultados próximos da realidade. Para o ano de 2016, por exemplo, o menor erro percentual relativo foi para o Modelo Malthusiano (0,17%). Logo, pode-se concluir que para esta população esse modelo pode ser escolhido para estimar os dados populacionais para mais alguns anos, enquanto os fatores naturais não se tornarem limitantes para o crescimento da população.

3.3 Estudo sobre a população dos Trabalhadores do Polo Naval - Situação A

Nesta seção são discutidos os resultados obtidos considerando-se apenas a população de trabalhadores do Polo Naval.

Nesta etapa do trabalho serão apresentados os dados coletados através do Sindicato dos Metalúrgicos de Rio Grande (STIMMERG), o qual descreve a população de trabalhadores do Polo Naval. A Tabela 11 apresenta a população do mesmo entre os anos de 2005 e 2015.

Tabela 11 – População de Trabalhadores Situação A

Ano	Tempo	População
2005	0	250
2006	1	850
2007	2	4000
2008	3	1800
2009	4	700
2010	5	1500
2011	6	2500
2012	7	4000
2013	8	18000
2014	9	12000
2015	10	7500

Fonte: STIMMERG

A Figura 10 apresenta os dados referentes ao número de trabalhadores. Para esta situação serão utilizados os mesmos anos inicial e final para a população.

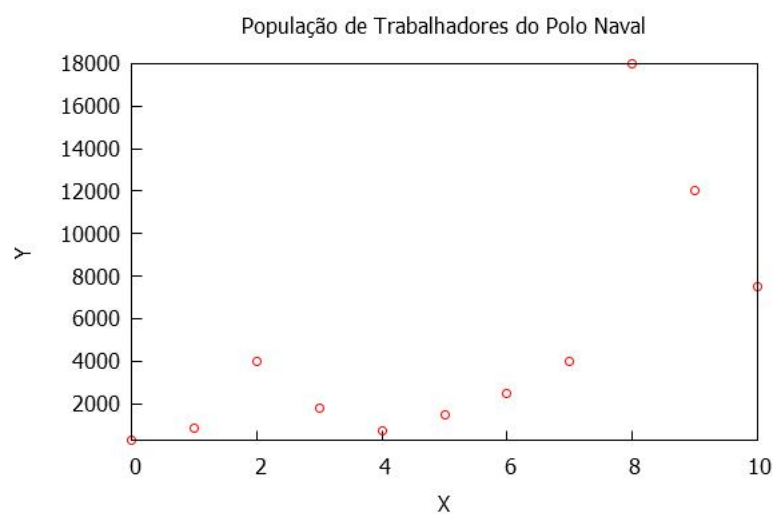


Figura 10 – Diagrama de dispersão para os dados da população de trabalhadores no wx-Maxima

A partir dos dados da Tabela 11 é possível seguir com o processo de modelagem.

3.3.1 Ajuste Linear

Seja $\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ a função que ajusta os dados. Os parâmetros α_1 e α_2 constituem a solução do sistema:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i y_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m y_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i + m\alpha_1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

A partir de agora assume-se a variável x_i para indicar o tempo, e a variável y_i para indicar a população.

Tabela 12 – Coeficientes para o cálculo empregando o ajuste linear Situação A

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
0	0	250	0	0
1	1	850	850	1
2	2	4000	8000	4
3	3	1800	5400	9
4	4	700	2800	16
5	5	1500	7500	25
6	6	2500	15000	36
7	7	4000	28000	49
8	8	18000	144000	64
9	9	12000	108000	81
10	10	7500	75000	100
Σ	55	53100	394550	385

Utilizando os dados da Tabela 12, é possível chegar a:

$$\begin{cases} 385\alpha_2 + 55\alpha_1 = 394550 \\ 55\alpha_2 + 11\alpha_1 = 53100 \end{cases} \quad (3.19)$$

De forma análoga ao procedimento realizado na seção 3.2.1, os cálculos algébricos foram obtidos através do wxMaxima, chegando-se a conclusão que:

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1173,1818 \\ \alpha_1 = -1038,6363 \end{cases} \quad (3.20)$$

Dessa maneira tem-se que o ajuste linear que melhor se ajusta aos dados fornecidos é (dado pela função):

$$\varphi(x) = 1173,18x - 1038,63. \quad (3.21)$$

Na Figura 11 os pontos vermelhos não pertencentes à curva correspondem a população de trabalhadores, enquanto que a curva esboçada em azul corresponde ao gráfico do ajuste linear determinada na função (3.21).

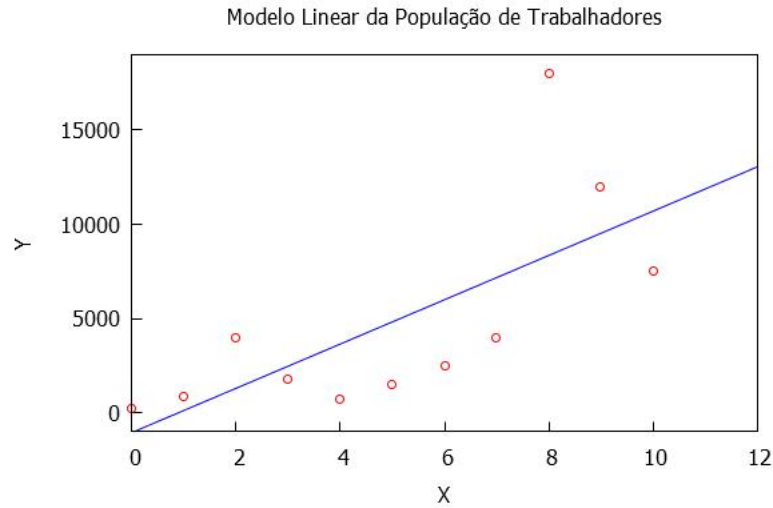


Figura 11 – Ajuste Linear de trabalhadores Situação A

Observa-se para esta situação que, o ajuste linear não é adequado para modelar dados demográficos para o Polo Naval de Rio Grande.

3.3.2 Ajuste Exponencial

Conforme o estudo realizado na seção 2.1.3 aplica-se o ajuste linear nas variáveis α_1 e α_2 , $P_i = \ln p_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i p_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m p_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i + m\alpha_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Tabela 13 – Cálculo para o ajuste exponencial Situação A

i	x_i	y_i	$\ln p_i$	$x_i \ln p_i$	x_i^2
0	0	250	5,5214	0	0
1	1	850	6,7452	6,7452	1
2	2	4000	8,2940	16,5880	4
3	3	1800	7,4955	22,4866	9
4	4	700	6,5510	26,2043	16
5	5	1500	7,3132	36,5661	25
6	6	2500	7,8240	46,9442	36
7	7	4000	8,2940	58,0583	49
8	8	18000	9,7981	78,3850	64
9	9	12000	9,3926	84,5339	81
10	10	7500	8,9226	89,2265	100
Σ	55	53100	86,1521	465,7385	385

Utilizando os dados da Tabela 13, tem-se que:

$$\begin{cases} 385\alpha_2 + 55\alpha_1 = 465,7385 \\ 55\alpha_2 + 11\alpha_1 = 86,1521 \end{cases} \quad (3.23)$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0,3180 \\ \alpha_1 = 6,2421 \end{cases} \quad (3.24)$$

Como definido $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = b$ na função $P = a + bt$, então $a = \ln \alpha$, logo $\alpha = \ln a \Rightarrow \alpha = e^a \Rightarrow e^{6,2421} \Rightarrow a = 513,9367$. Assim tem-se que o ajuste exponencial é determinado pela função:

$$\varphi(x) = 513,9367e^{0,3180x}. \quad (3.25)$$

e pode ser visualizado na Figura 12.

Ao encontrar a função que melhor ajusta o modelo exponencial, pode-se obter uma aproximação pelo wxMaxima.

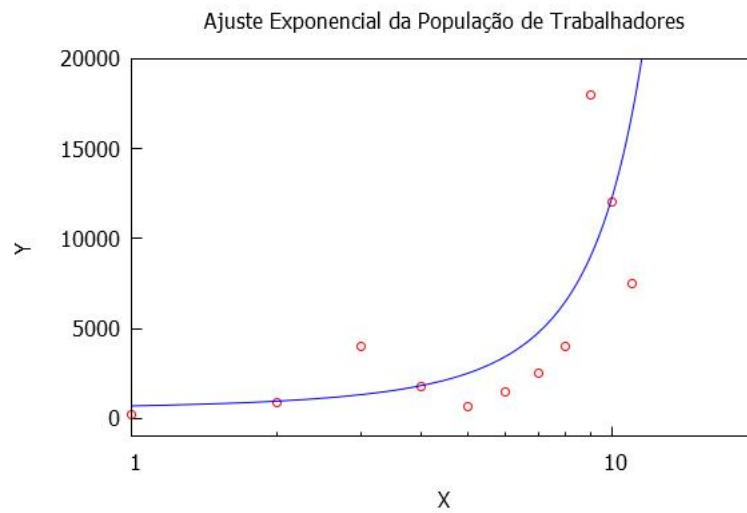


Figura 12 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.25)

De forma semelhante a seção 3.2.2, tem-se que a função é:

$$\varphi(x) = 982,7955e^{0,2297x}. \quad (3.26)$$

Assim através da função (3.26), pode-se obter o gráfico conforme (Figura 13) .

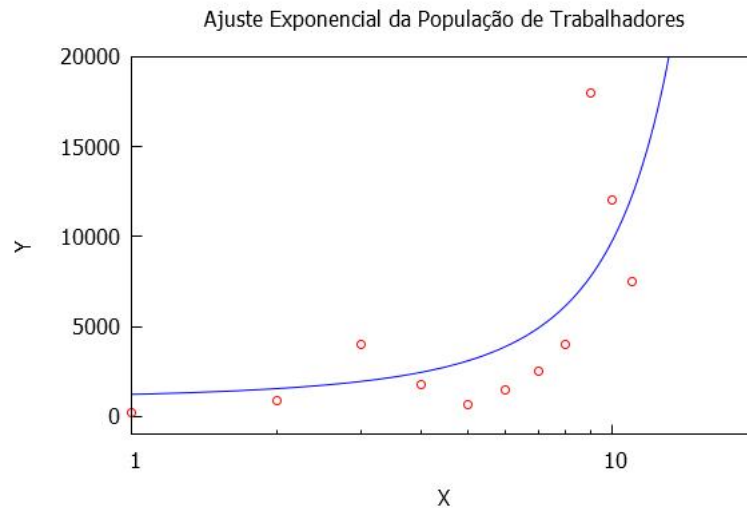


Figura 13 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.26)

Fazendo-se uma comparação entre os gráficos obtidos (Figura 14), pode-se perceber que a função (3.25) (em azul) conseguiu ajustar alguns dados a sua curva, já a função (3.26) (na cor preto) não obteve dados ajustados a curva.

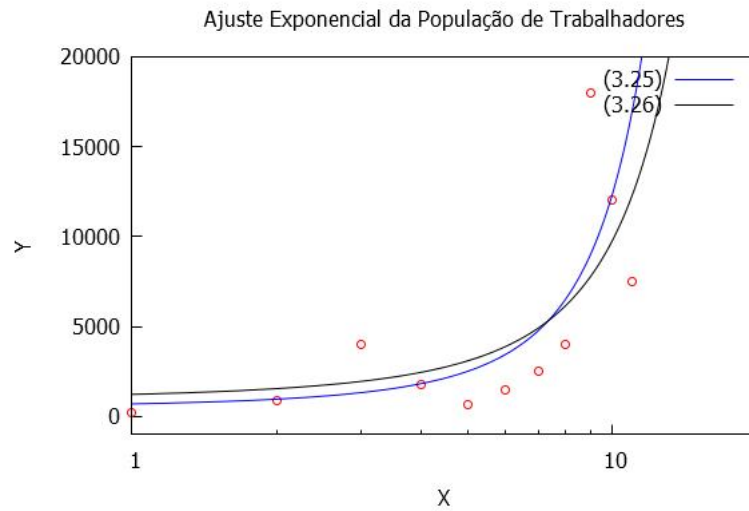


Figura 14 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ das funções (3.25) e (3.26)

3.3.3 Ajuste Polinomial

De forma semelhante aos desenvolvimentos da seção 3.2.3, é possível efetuar uma análise no polinômio de décimo grau

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & \dots & 1024 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & \dots & 59049 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & \dots & 1048576 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & \dots & 9765625 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & \dots & 60466176 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & \dots & 282475249 \\ 1 & 8 & 64 & 512 & \dots & 1073741824 \\ 1 & 9 & 81 & 729 & \dots & 3486784401 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 & \dots & 10000000000 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 250 \\ 850 \\ 4000 \\ 1800 \\ 700 \\ 1500 \\ 2500 \\ 4000 \\ 18000 \\ 12000 \\ 7500 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \end{pmatrix}.$$

Efetuando a multiplicação, obtém-se:

$$X^T \cdot f = \begin{pmatrix} 53100 \\ 394550 \\ 3241750 \\ 27689750 \\ 241631350 \\ 2141050550 \\ 19210993750 \\ 174271481750 \\ 1596453431350 \\ 14754724306550 \\ 137465324905750 \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema $X^T X \alpha = X^T f$ é:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 250 \\ -78977.4802 \\ 207451.7708 \\ -217096.1985 \\ 124318.0006 \\ -43554.9494 \\ 9732.4609 \\ -1390.3005 \\ 122.6388 \\ -6.0715 \\ 0.1288 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Obtendo-se assim a função polinomial de décimo grau, que melhor modela os dados:

$$\begin{aligned} \varphi_{10}(x) = & 0,128x^{10} - 6,071x^9 + 122,638x^8 - 1390,300x^7 + 9732,460x^6 - 43554,949x^5 \\ & + 124318,000x^4 - 217096,198x^3 + 207451,770x^2 - 78977,480x + 250 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Assim pode-se analisar a representação gráfica do modelo polinomial conforme a função (3.28), que será apresentado no Anexo B.

Os comandos utilizados no wxMaxima a fim de se obter um ajuste polinomial de grau dois são,

```
(%i1) M1:matrix([0,250],[1,850],[2,4000],[3,1800],[4,700],[5,1500],[6,2500],[7,4000],
[8,18000],[9,12000],[10,7500]);
```

$$(M1) \quad \begin{pmatrix} 0 & 250 \\ 1 & 850 \\ 2 & 4000 \\ 3 & 1800 \\ 4 & 700 \\ 5 & 1500 \\ 6 & 2500 \\ 7 & 4000 \\ 8 & 18000 \\ 9 & 12000 \\ 10 & 7500 \end{pmatrix}$$

```
(%i2) load("plsquares");
```

```
(%o2)
```

```
C:\maxima-5.38.1\share\maxima\5.38.1_5_gdf93b7b_dirty\share\lsquares\plsquares.mac
```

```
(%i3) load("lsquares");
```

```
(%o3)
```

```
C:\maxima-5.38.1\share\maxima\5.38.1_5_gdf93b7b_dirty\share\lsquares\lsquares.mac
```

```
(%i4) plsquares(M1,[x,y],y,1);
```

Determination Coefficient for

y

=

0.4838008979448364

$$y = \frac{12905x - 11425}{11} \quad (%o4)$$

```
(%i5) lsquares_estimates(M1,[x,y],y=a*x+b,[a,b]);
```

$$[[a = \frac{12905}{11}, b = -\frac{11425}{11}]] \quad (%o5)$$

```
(%i6) plsquares(M1,[x,y],y,2);
```

Determination Coefficient for

$$y$$

$$=$$

$$0.5158402619234823$$

$$y = \frac{46375x^2 + 39545x + 250050}{429} \quad (\%06)$$

De forma análoga a seção 3.2.3, tem-se que o erro residual ϵ_n que define o melhor modelo polinomial está representado na Tabela 14.

Tabela 14 – Erro residual dos Polinômios Situação A

n	ϵ_n
3	$1,2621354100445 \cdot 10^7$
5	$4,704925434414028 \cdot 10^6$
8	$7,691677918159864 \cdot 10^5$
10	$4,149415269549128 \cdot 10^{-13}$

3.3.4 Modelo de Malthus

Aplicando a teoria do modelo discreto de Malthus ao nosso estudo, nesta seção obtém-se a modelagem matemática.

Utilizando os dados é possível calcular a taxa de crescimento média (relativa) tomando por base a população de $P_0 = 250$ e $P_{10} = 7500$, onde k é dada através da equação (2.21), substituindo os dados obtém-se:

$$k = \sqrt[10]{\frac{7500}{250}} - 1 \Rightarrow k = 0,405115826, \quad (3.29)$$

o que nos permite afirmar que a população de trabalhadores do Polo Naval, cresceu a uma taxa média de, 40,51% ao ano nestes dez anos.

Com as informações reunidas é possível retomar a equação (2.22) e reescrevê-la,

$$P_t = 250e^{\ln(1,4051)t}. \quad (3.30)$$

Através da equação (3.30), obtém-se a Tabela 15.

Tabela 15 – Modelo Populacional de trabalhadores Situação A

Tempo	População Situação A	Modelo Malthus
0	250	250
1	850	351
2	4000	493
3	1800	693
4	700	974
5	1500	1369
6	2500	1924
7	4000	2703
8	18000	3798
9	12000	5337
10	7500	7499

Na Figura 15, representa-se o valor obtido do modelo Malthusiano versus a população de trabalhadores Situação A.

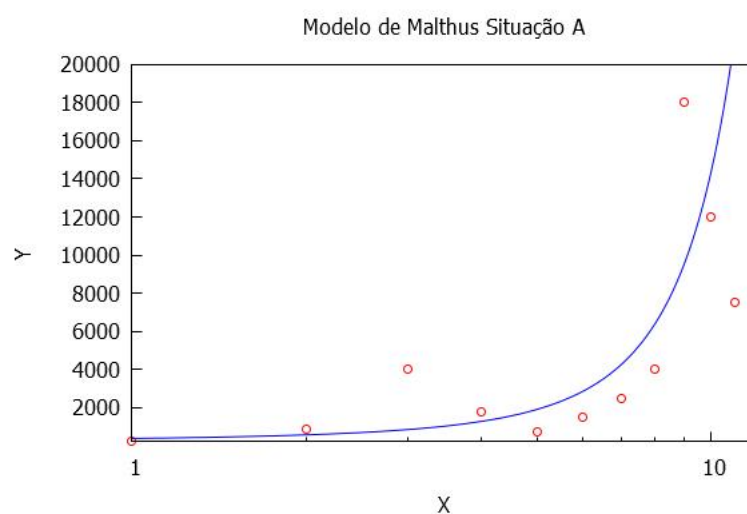


Figura 15 – Modelo Malthusiano Situação A

3.3.5 Modelo Logístico ou Verhulst

Partindo do estudo realizado na seção 3.2.5, é construída a Tabela 16 para análise dos valores da taxa de crescimento k ano a ano.

Tabela 16 – Taxa de crescimento anual Situação A

i	População	Crescimento relativo
0	250	2,40
1	850	3,7058
2	4000	-0,55
3	1800	-0,6111
4	700	1,1428
5	1500	0,6666
6	2500	0,60
7	4000	3,50
8	18000	-0,3333
9	12000	-0,375
10	7500	10,1459

Assim, para determinar o valor de P_∞ , consideram-se os valores populacionais de 2012 a 2014, como mostra a Tabela 17.

Tabela 17 – Valores utilizados no método de Ford-Walford Situação A

i	P_t	P_{t+1}
7	4000	18000
8	18000	12000
9	12000	7500

Fazendo-se o ajuste linear, obtém-se:

$$\varphi(x) = -0,476x + 17899, \quad (3.31)$$

onde,

$$P_\infty = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}. \quad (3.32)$$

Substituindo os valores da função (3.31), tem-se

$$P_\infty = \frac{17899}{1 - (-0,476)} \Rightarrow P_\infty = 12126. \quad (3.33)$$

Dessa forma tem-se que $P_\infty = 12126$, $P_0 = 250$ e $k = 0,405115$, substituindo os valores na equação (2.38), tem-se que:

$$P(t) = \frac{12126 \times 250}{(12126 - 250)e^{-0,405115t} + 250}.$$

$$P(t) = \frac{3031500}{11876 e^{-0,405115t} + 250}. \quad (3.34)$$

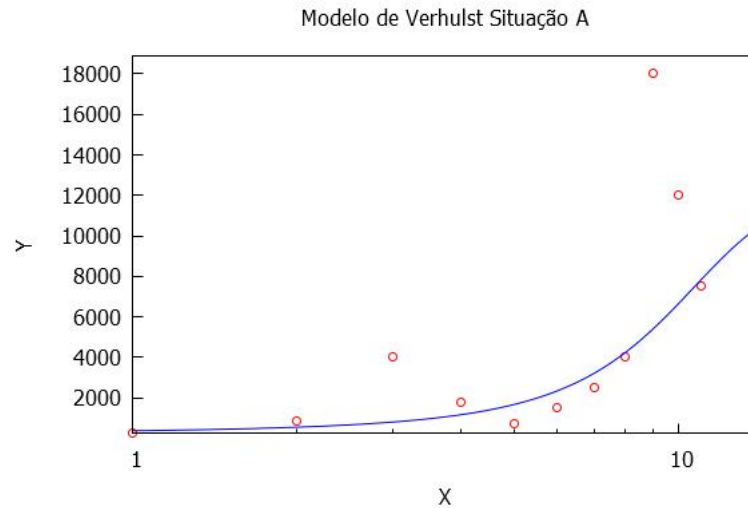


Figura 16 – Modelo de Verhulst Situação A

A fim de uma melhor visualização dos resultados, na Tabela 18 são apresentadas as estimativas para os modelos estudados para a Situação A.

Tabela 18 – Análise dos modelos comparados para a Situação A

Ano	População Real	A.L	A.E	A.P	M.M	M.V
2005	250	—	706	250	250	250
2006	850	135	971	850	351	371
2007	4000	1308	1334	4000	493	548
2008	1800	2489	1834	1800	693	804
2009	700	3654	2520	700	974	1166
2010	1500	4827	3464	1500	1369	1669
2011	2500	6000	4760	2500	1924	2341
2012	4000	7174	6543	4000	2703	3208
2013	18000	8347	8992	18000	3798	4241
2014	12000	9520	12359	12000	5337	5414
2015	7500	10693	16985	7500	7499	6638

A.L = Ajuste Linear, A.E = Ajuste Exponencial, A.P = Ajuste Polinomial, M.M = Modelo de Malthus, M.V = Modelo de Verhulst.

Com base nos resultados, pode-se perceber que a aproximação polinomial é a que melhor ajusta os pontos, entretanto ela não pode ser empregada para estimar a população de trabalhadores do Polo Naval, uma vez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{10}(x) = +\infty$. Com o objetivo de

tentar melhorar os resultados, inclui-se no estudo as populações para os anos de 2016 e 2017. Estes dados foram obtidos em uma conversa informal com um representante do Sindicato dos Metalúrgicos do município.

3.4 Estudo sobre a população dos Trabalhadores do Polo Naval - Situação B

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos após a implementação da metodologia proposta, considerando-se os dados coletados através de uma conversa informal com o representante do Sindicato dos Metalúrgicos (STIMMERG). A Tabela 19 apresenta a população de trabalhadores do Polo Naval entre os anos de 2005 e 2017.

Tabela 19 – População de Trabalhadores Situação B

Ano	Tempo	População
2005	0	250
2006	1	850
2007	2	4000
2008	3	1800
2009	4	700
2010	5	1500
2011	6	2500
2012	7	4000
2013	8	18000
2014	9	12000
2015	10	7500
2016	11	600
2017	12	100

Fonte: Conversa informal com o representante do STIMMERG

Pode-se representar a Tabela 19 através da Figura 17, apresentando-se os dados referentes ao número de trabalhadores. Para relacionar os Anos t e a População P , foi considerado o ano inicial, o qual é chamado ano zero ou ainda tempo zero ($t = 0$), o ano de 2005, pelo fato de ser o primeiro ano ao qual se tem o registro de número de trabalhadores, e ano final ou tempo final ($t = 12$), o ano de 2017.

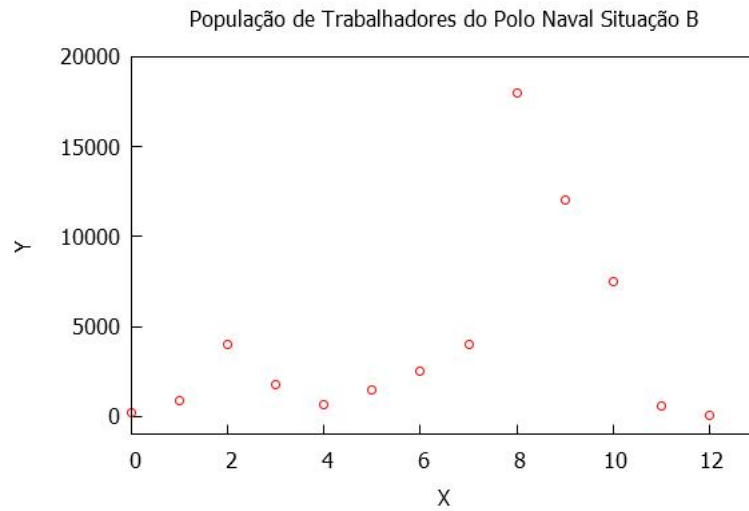


Figura 17 – Diagrama de dispersão para os dados da população de trabalhadores Situação B no wxMaxima

Com os dados da Tabela 19, é possível aplicar a metodologia proposta, da mesma forma que estavam sendo abordados os conceitos na seção 3.3.1.

3.4.1 Ajuste Linear

Seja $\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ a função que ajusta os dados. Os parâmetros α_1 e α_2 constituem a solução do sistema:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i y_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m y_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i + m \alpha_1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Obtendo-se assim a Tabela 20.

Tabela 20 – Coeficientes para o cálculo empregando o ajuste linear Situação B

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
0	0	250	0	0
1	1	850	850	1
2	2	4000	8000	4
3	3	1800	5400	9
4	4	700	2800	16
5	5	1500	7500	25
6	6	2500	15000	36
7	7	4000	28000	49
8	8	18000	144000	64
9	9	12000	108000	81
10	10	7500	75000	100
11	11	600	6600	121
12	12	100	1200	144
Σ	78	53800	402350	650

De forma semelhante aos desenvolvimentos da seção 3.3.1, tem-se que o ajuste linear é dado pela função:

$$\varphi(x) = 437,08x + 1515,93. \quad (3.36)$$

Utilizando os dados fornecidos pode-se plotar o gráfico através do software wxMaxima. Na Figura 18 os pontos vermelhos (círculos) não pertencentes a curva se referem a população de trabalhadores, enquanto que a curva esboçada em azul corresponde ao gráfico do ajuste linear determinada na função (3.36).

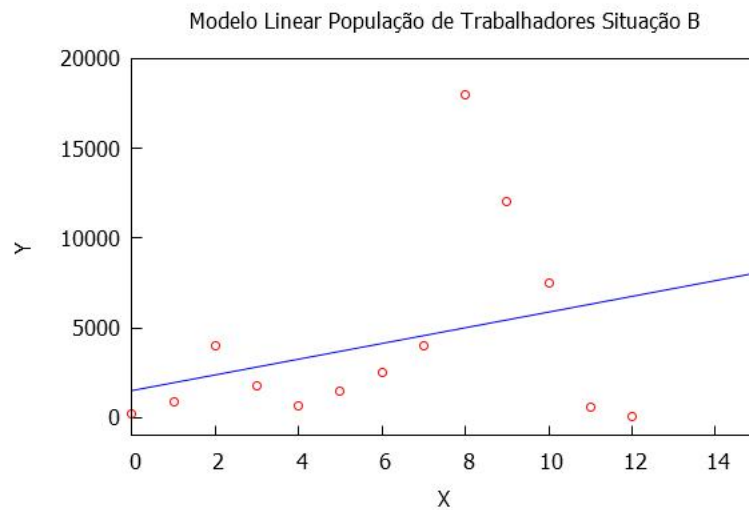


Figura 18 – Modelo Linear Situação B

3.4.2 Ajuste Exponencial

De forma análoga inicia-se o estudo em questão, aplicando-se o ajuste linear nas variáveis α_1 e α_2 , como visto na seção 2.1.3, definindo a variável $P_i = \ln p_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i p_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m p_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i + m\alpha_1 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Tabela 21 – Cálculo para o ajuste exponencial Situação B

i	x_i	y_i	$\ln p_i$	$x_i \ln p_i$	x_i^2
0	0	250	5,5214	0	0
1	1	850	6,7452	6,7452	1
2	2	4000	8,2940	16,5880	4
3	3	1800	7,4955	22,4866	9
4	4	700	6,5510	26,2043	16
5	5	1500	7,3132	36,5661	25
6	6	2500	7,8240	46,9442	36
7	7	4000	8,2940	58,0583	49
8	8	18000	9,7981	78,3850	64
9	9	12000	9,3926	84,5339	81
10	10	7500	8,9226	89,2265	100
11	11	600	6,3969	70,3662	121
12	12	100	4,6051	55,2620	144
Σ	78	53800	97,1542	591,3668	650

Utilizando os dados da Tabela 21, de forma semelhante aos desenvolvimentos apresentados nas seções anteriores, tem-se que o ajuste exponencial é determinado pela função:

$$\varphi(x) = 1332,8909e^{0,0463x}. \quad (3.38)$$

A função representada pela equação (3.38) pode ser visualizada na Figura 19.

Ao encontrar a função que melhor ajusta o modelo exponencial, pode-se obter uma aproximação pelo wxMaxima.

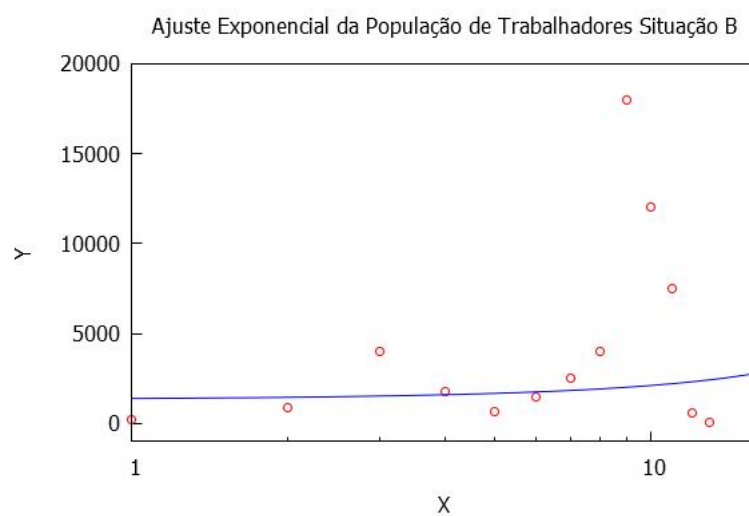


Figura 19 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.38)

Da mesma forma que a explicação usada na seção 3.4.2, tem-se que a função é:

$$\varphi(x) = 2503,6917e^{0.06954x}. \quad (3.39)$$

Assim através da função (3.39), pode-se obter o gráfico (Figura 20).

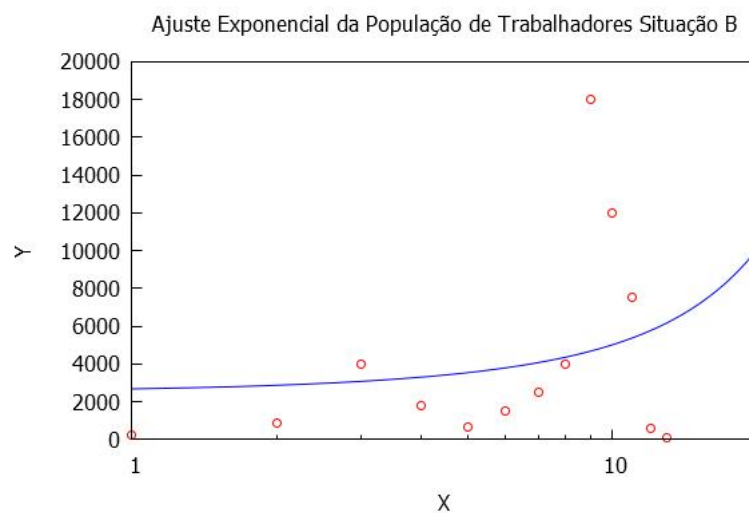


Figura 20 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.39)

Na Tabela 22, são representadas as estimativas da população através das funções (3.38) e (3.39).

Tabela 22 – Estimativa para a Situação B Modelo Exponencial

Ano	População Real	$\varphi(x) = 132,8909e^{0.0463x}$	$\varphi(x) = 2503,6917e^{0.06954x}$
2011	2500	1844	4074
2012	4000	1932	4367
2013	18000	2023	4682
2014	12000	2120	5019
2015	7500	2220	5381
2016	600	2326	5768
2017	100	2436	6184
2020	—	2799	7618

3.4.3 Ajuste Polinomial

De forma semelhante aos desenvolvimentos da seção 3.3.3, será possível efetuar uma análise e concluir que o polinômio de décimo segundo grau é o polinômio que melhor aproxima os dados da Tabela 19.

Do mesmo modo que vem sendo apresentando os desenvolvimentos dos cálculos matriciais, tem-se que a função polinomial de décimo segundo grau que melhor se ajusta ao modelo é:

$$\begin{aligned}
\varphi_{12}(x) = & 0,0102x^{12} - 0,7194x^{11} + 22,2000x^{10} - 396,9107x^9 + 4554,5550x^8 - 35097,6070x^7 \\
& + 184586,9834x^6 - 659360,4326x^5 + 1558364,3397x^4 - 2302494,5014x^3 \\
& + 1891721,9113x^2 - 641299,8285x + 249,9998.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Assim pode-se analisar a representação gráfica do modelo polinomial conforme a função (3.40) e a Figura 21.

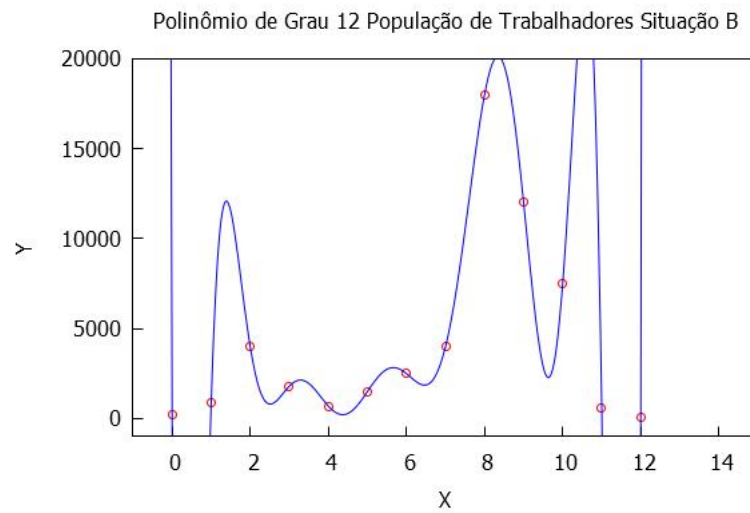


Figura 21 – Modelo Polinomial Situação B

A partir da Figura 21 pode-se verificar que o polinômio de décimo segundo grau foi o que melhor se ajustou ao nosso modelo. Na Figura 22 são ilustrados gráficos de polinômios de graus diferentes que não modelam o estudo em questão.

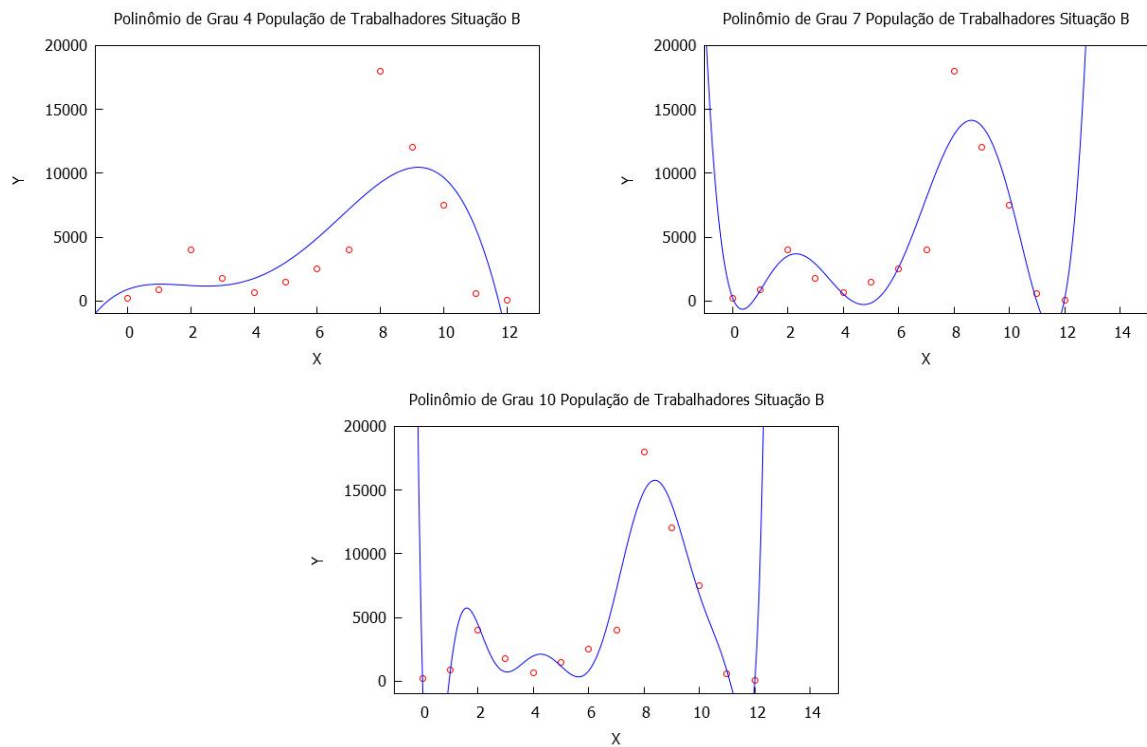


Figura 22 – Conjunto de figuras dos polinômios de grau 4, 7 e 10

Na Tabela 23 é apresentado o cálculo para o erro residual ϵ_n para os polinômios

de grau 4, 7, 10 e 12.

Tabela 23 – Erro residual dos Polinômios Situação B

n	ϵ_n
4	$1,125934298732944 \cdot 10^7$
7	$3,810144902133063 \cdot 10^6$
10	$2,277456996320725 \cdot 10^6$
12	$8,355350823877381 \cdot 10^{-10}$

Para a situação B, foram implementados os modelos analíticos de Malthus e Verhulst, entretanto eles não apresentaram bons resultados. Isso era esperado, uma vez que tais modelos aproximam os dados utilizando funções exponenciais. Na seção 3.4.2 foi realizado um ajuste por mínimos quadrados, considerando uma aproximação exponencial e pode-se perceber que ela não apresentou resultados satisfatórios. Por esse motivo, os modelos de Malthus e Verhulst não são aqui apresentados.

Na Tabela 32 é apresentada a estimativa dos modelos para os anos entre 2005 e 2017, que pode ser visto no Anexo B.

Na busca de melhores resultados, criou-se uma situação hipotética (Situação C), considerando-se que o fluxo de plataforma e navios não tivesse sido interrompido pela atual situação econômica do País.

3.5 Estudo sobre a população dos Trabalhadores do Polo Naval - Situação C

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos após a implementação da metodologia proposta, considerando-se que o fluxo de plataforma e navios fossem contínuos, excluindo-se os dados a partir de 2012.

A Tabela 24 apresenta a população de trabalhadores do Polo Naval entre os anos de 2005 e 2012.

Tabela 24 – População de Trabalhadores Situação C

Ano	Tempo	População
2005	0	250
2006	1	850
2007	2	4000
2008	3	1800
2009	4	700
2010	5	1500
2011	6	2500
2012	7	4000

Utilizando-se a Tabela 24 seus dados serão representados através da Figura 23. Para relacionar os Anos t e a População P , foi considerado o ano inicial, o qual é chamado ano zero ou ainda tempo zero ($t = 0$), o ano de 2005, pelo fato de ser o primeiro ano ao qual se tem o registro de número de trabalhadores, e ano final ou tempo final ($t = 7$), o ano de 2012.

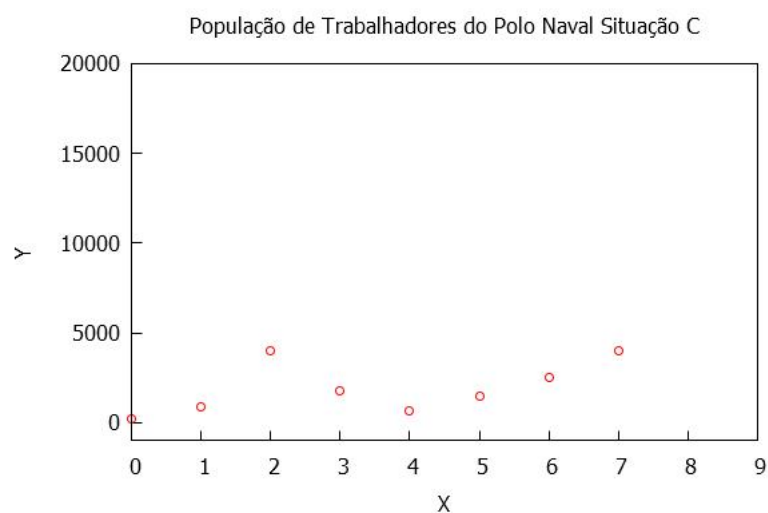


Figura 23 – Diagrama de dispersão para os dados da população de trabalhadores Situação C no wxMaxima

A partir dos dados da Tabela 24, é possível seguir com o processo de modelagem.

3.5.1 Ajuste Linear

Seja $\varphi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ a função que ajusta os dados. Os parâmetros α_1 e α_2 constituem a solução do sistema:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i y_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m y_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i + m\alpha_1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Obtendo-se assim a Tabela 25.

Tabela 25 – Coeficientes para o cálculo empregando o ajuste linear Situação C

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
0	0	250	0	0
1	1	850	850	1
2	2	4000	8000	4
3	3	1800	5400	9
4	4	700	2800	16
5	5	1500	7500	25
6	6	2500	15000	36
7	7	4000	28000	49
Σ	28	15600	67550	140

De forma semelhante aos cálculos demonstrados na seção 3.4.1, tem-se que o ajuste linear que melhor se ajusta aos dados fornecidos é:

$$\varphi(x) = 308,3333x + 870,8333. \quad (3.42)$$

Utilizando os dados fornecidos pode-se plotar o gráfico através do wxMaxima. Na Figura 24 os pontos vermelhos se referem a população de trabalhadores, enquanto que a curva esboçada em azul corresponde ao gráfico do ajuste linear determinada na função (3.42).

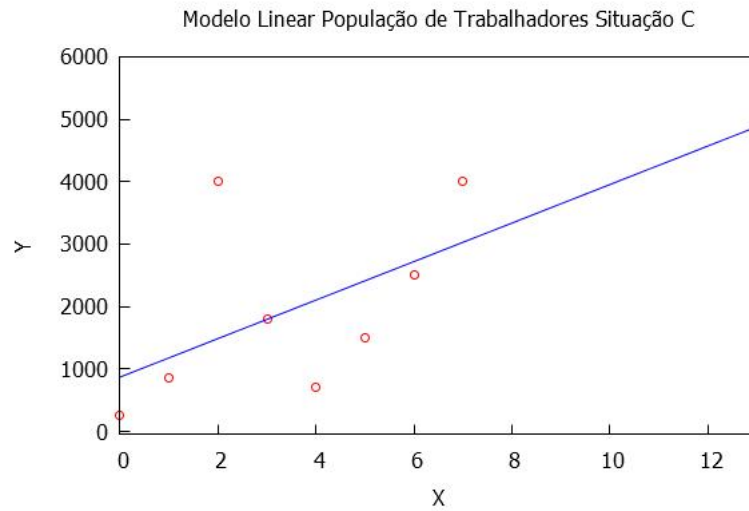


Figura 24 – Ajuste Linear da população de trabalhadores no wxMaxima Situação C

3.5.2 Ajuste Exponencial

De forma idêntica inicia-se o estudo em questão, aplicando-se o ajuste linear nas variáveis α_1 e α_2 , como visto na seção 2.1.3 a variável $P_i = \ln p_i$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i p_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha_1 \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m p_i &= \alpha_2 \sum_{i=1}^m x_i + m\alpha_1 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Tabela 26 – Cálculo para o ajuste exponencial Situação C

i	x_i	y_i	$\ln p_i$	$x_i \ln p_i$	x_i^2
0	0	250	5,5214	0	0
1	1	850	6,7452	6,7452	1
2	2	4000	8,2940	16,5880	4
3	3	1800	7,4955	22,4866	9
4	4	700	6,5510	26,2043	16
5	5	1500	7,3132	36,5661	25
6	6	2500	7,8240	46,9442	36
7	7	4000	8,2940	58,0583	49
Σ	28	15600	58.0383	213.5930	140

Utilizando os dados da Tabela 26, de forma análoga aos cálculos da seção 3.4.2, tem-se que o ajuste exponencial é determinado pela função:

$$\varphi(x) = 591,8234e^{0,2490x}. \quad (3.44)$$

A função representada pela equação (3.44) pode ser visualizada na Figura 25.

Ao encontrar a função que melhor ajusta o modelo exponencial, pode-se obter uma aproximação pelo wxMaxima.

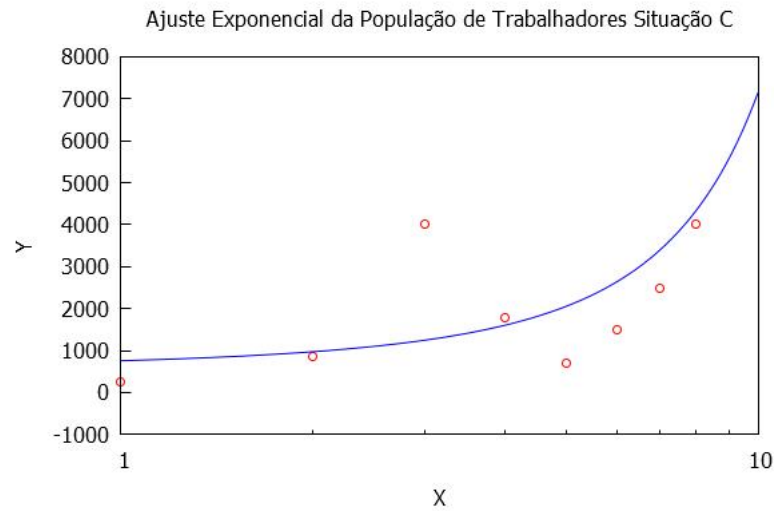


Figura 25 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.44)

De forma semelhante a explicação usada na seção 3.4.2, tem-se que a função é:

$$\varphi(x) = 821,1303e^{0,1736x}. \quad (3.45)$$

Assim através da função 3.45, pode-se obter o gráfico da Figura 26.

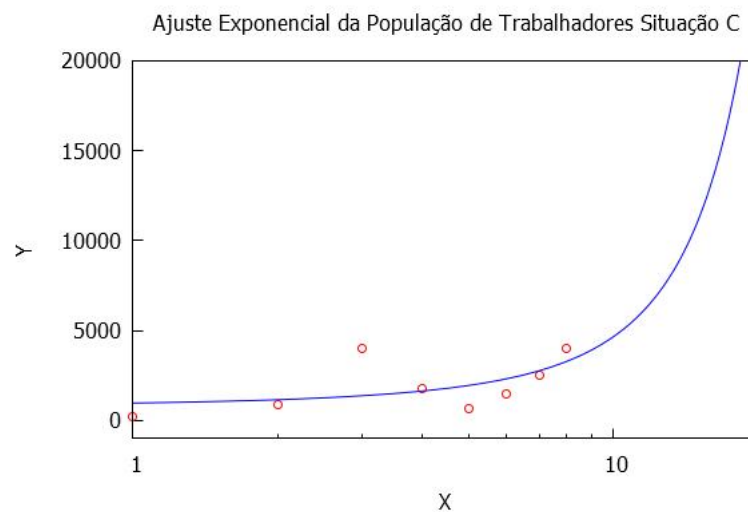


Figura 26 – Ajuste Exponencial da $\varphi(x)$ dada a função (3.45)

Na Figura 27 apresenta-se uma comparação gráfica entre as funções (3.44) (em azul) e (3.45) (em preto).

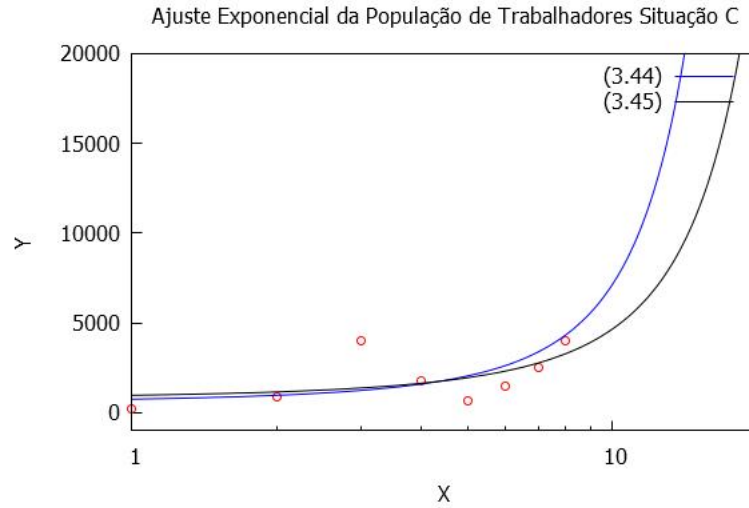


Figura 27 – Ajuste Exponencial das funções (3.44) e (3.45)

3.5.3 Ajuste Polinomial

De forma semelhante aos desenvolvimentos da seção 3.4.3, será possível efetuar uma análise do polinômio que melhor ajusta os pontos para a Situação C. Neste caso, o polinômio de sétimo grau.

$$\begin{aligned}\varphi_7(x) = & -4,3253x^7 + 122,9861x^6 - 1405,9027x^5 + 8176,7361x^4 \\ & - 24996,3194x^3 + 36575,2777x^2 - 17868,4523x + 250.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Assim pode-se analisar a representação gráfica do modelo polinomial conforme a função 3.46, que será apresentado no Anexo B.

De forma análoga a seção 3.4.3, será apresentado na Tabela 27 o cálculo para o erro residual ϵ_n .

Tabela 27 – Erro residual dos Polinômios Situação C

n	ϵ_n
3	$5,999499458874455 \cdot 10^5$
5	$3,01518429487183 \cdot 10^5$
7	$6.869834507420343 \cdot 10^{-19}$

3.5.4 Modelo de Malthus

Nesta seção obtém-se a modelagem matemática utilizando-se o modelo Malthusiano Discreto.

Utilizando os dados é possível calcular a taxa de crescimento média (relativa) tomando por base a população de $P_0 = 250$ e $P_7 = 4000$, onde k é dada através da equação (2.21), substituindo os dados obtém-se:

$$k = \sqrt[7]{\frac{4000}{250}} - 1 \Rightarrow k = 0,485994289, \quad (3.47)$$

o que nos permite afirmar que a população de trabalhadores do Polo Naval, cresceu a uma taxa média de, 48.59% ao ano nestes 7 anos.

Como o modelo Malthusiano é da forma $P_t = P_0 e^{\ln(1+k)t}$, tem-se que:

$$P_t = 250e^{\ln(1,4859)t}. \quad (3.48)$$

Através da equação (3.48), obtém-se a Tabela 28.

Tabela 28 – Modelo Populacional de trabalhadores Situação C

Tempo	População Situação C	Modelo Malthus
0	250	250
1	850	371
2	4000	552
3	1800	820
4	700	1219
5	1500	1811
6	2500	2691
7	4000	3999

Na Figura 28, representa-se o valor obtido do modelo Malthusiano versus a população de trabalhadores Situação C.

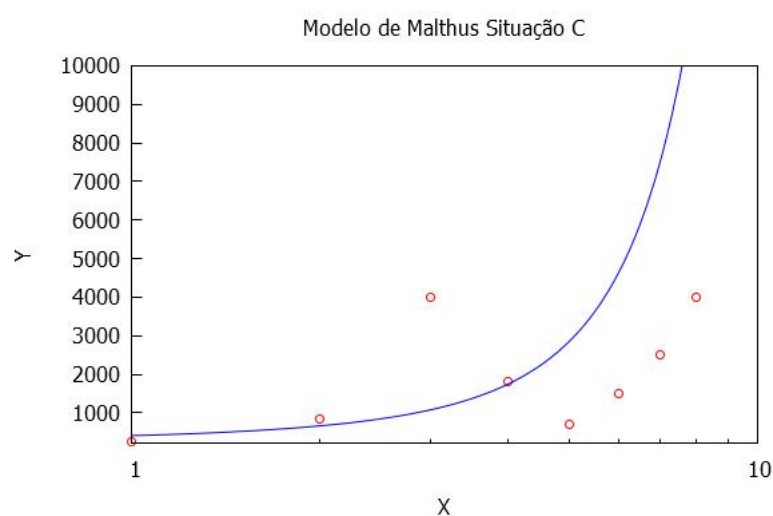


Figura 28 – Modelo Malthusiano Situação C

Na Tabela 29 é representada uma comparação entre os métodos para a população da Situação C.

Tabela 29 – Análise dos modelos comparados a Situação C

Ano	Pop. Real	Ajuste Linear	Ajuste Exp. (3.45)	Ajuste Pol.	Malthus
2005	250	871	977	250	250
2006	850	1179	1162	850	371
2007	4000	1488	1382	4000	552
2008	1800	1796	1645	1800	820
2009	700	2104	1956	700	1219
2010	1500	2413	2327	1500	1811
2011	2500	2721	2769	2500	2691
2012	4000	3029	3294	4000	3999

Com base nos resultados apresentados na Tabela 29, pode-se perceber que, a longo prazo, o modelo de Malthus apresenta a melhor estimativa dentre estes modelos.

3.5.5 Modelo Logístico ou Verhulst

Para cálculos feitos de forma análoga à seção 3.3.5, obteve-se a Tabela 30 referente a taxa de crescimento k .

Tabela 30 – Taxa de crescimento anual Situação C

i	População	Crescimento Relativo
0	250	2,40
1	850	3,7058
2	4000	-0,55
3	1800	-0,6111
4	700	1,1428
5	1500	0,6666
6	2500	0,60
7	4000	7,3541

Para determinar o valor de P_∞ foram considerados os valores populacionais de 2006 a 2009, conforme a Tabela 31.

Tabela 31 – Valores utilizados no método de Ford-Walford Situação B

i	P_t	P_{t+1}
1	850	4000
2	4000	1800
3	1800	700

Fazendo-se o ajuste linear, obtém-se:

$$\varphi(x) = 3248,467922119374 - 0,4880306415576122x, \quad (3.49)$$

onde,

$$P_\infty = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}. \quad (3.50)$$

Substituindo os valores dos coeficientes da função 3.49, tem-se

$$P_\infty = 2183,065208065208. \quad (3.51)$$

Dessa forma tem-se que $P_\infty = 2183,065208065208$, $P_0 = 250$ e $k = 0,485994289$, substituindo os valores na equação (2.38), tem-se que:

$$P(t) = \frac{545766,3}{1933,065208065208e^{-0,486t} + 250} \quad (3.52)$$

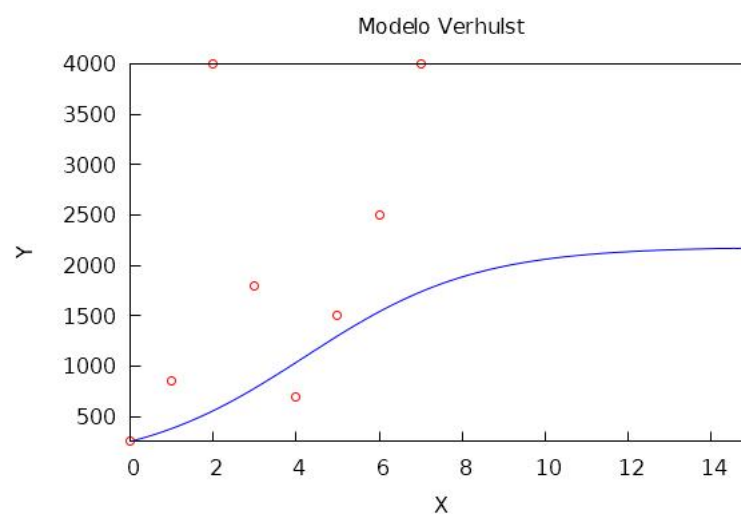


Figura 29 – Modelo de Verhulst Situação C

Observando-se a Figura 29, pode-se afirmar que o Modelo de Verhulst, para essa situação, não obteve bons resultados. Acredita-se que isso se deva ao fato de que a aproximação utilizada para o valor de P_{∞} não seja a mais adequada. Foram testados outros intervalos, que também não apresentaram estimativas satisfatórias.

4 Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo, analisar o crescimento e decréscimo de duas populações: a de trabalhadores do Polo Naval e a da cidade de Rio Grande, entre os anos de 2005 e 2015, utilizando modelos matemáticos pertinentes ao estudo. Para atingir tal objetivo foram empregados cinco modelos: linear, exponencial, polinomial, malthusiano e logístico.

Foi realizado um estudo aprofundado para identificar qual o modelo que melhor se ajusta aos dados disponibilizados pelo Sindicato dos Metalúrgicos de Rio Grande e pela plataforma Fundação de Economia e Estatística. O trabalho buscou também identificar o melhor resultado para duas situações: população já estimada e população a estimar. Para uma análise mais detalhada dos resultados foi utilizado o software wxMaxima e seus recursos gráficos e algébricos.

Diante desses aspectos, com a aplicação da metodologia proposta nesse trabalho foi possível estimar, para cada situação, o crescimento da população. Os modelos estudados mostram, em geral, resultados próximos da realidade e podem auxiliar na análise da evolução do crescimento do tamanho dessas populações. Tais estimativas podem ser úteis para o planejamento da urbanização, desenvolvimento econômico e mercado de trabalho do município.

Cumpramos ressaltar que ao efetuar o estudo bibliográfico para a fundamentação teórica deste trabalho, não foram encontradas referências relacionadas à utilização das metodologias propostas, e nem ao menos do software wxMaxima, no estudo populacional de Rio Grande.

Futuramente, pretende-se estudar outros métodos para estimar o valor-limite e metodologias que possam ser aplicadas em populações com modelos de sistemas dinâmicos com competições entre cidades (ou Polos Navais).

Referências

- ALITOLEF, S. dos S. *Algumas Aplicações Das Equações Diferenciais*. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso. Disponível em: <http://www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_2011_sergio_alitollef.pdf>. Citado na página 16.
- AVILA, K. *Mais 70 trabalhadores do estaleiro Ecovix são demitidos em Rio Grande*. 2017. GaúchaZH - Economia. Acesso em: 21.09.2017. Citado na página 12.
- BARROSO, L. C. et al. *Cálculo Numérico (Com Aplicações)*. São Paulo: Moderna, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 41.
- GLOBO, G. o portal de notícias da. *Audiência pública em Rio Grande busca soluções para polo naval*. 2017. Notícias. Citado na página 11.
- LEITE, M. B. F.; SILVA, G. H. J. da; SOUSA, L. F. de. Modelos matemáticos para o crescimento da população do estado de são paulo e a exploração de diferentes taxas de crescimento. *Ciência & Educação*, v. 17, n. 4, p. 927-940, 2011, São Paulo, 2011. Citado na página 41.
- LIMA, A. M.; VIEIRA, M. de M. *Introdução à modelagem matemática aplicada ao crescimento populacional*. 2009. Curso de Especialização em Matemática – Formação do Professor. Citado na página 15.
- MARTINS, S. F. *Cidade do Rio Grande: Industrialização e Urbanidade (1873-1990)*. Rio Grande: FURG, 2006. Citado na página 11.
- MOSCHOUTIS, C. P. da R. *Análise do crescimento populacional brasileiro*. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso – PUC/ RS. Citado 5 vezes nas páginas 15, 17, 19, 24 e 41.
- NOGUEZ, E. L. B. *Gênese e Transformações do Bairro Cidade Nova no Município do Rio Grande/RS*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós Graduação em Geografia da Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2015. Citado na página 11.
- PORTO, R. G. *Município de Rio Grande*. 2017. Histórico. Disponível em: <http://www.portoriogrande.com.br/site/sobre_porto_municipio_rg.php>. Citado na página 11.
- PUGENS, B. P.; SILVA, J. F.; FERNANDES, R. da R. Modelos matemáticos que descrevem o crescimento populacional: aplicados e contextualizados aos dados do município de osório. *Revista Modelos – FACOS/CNEC Osório*, Osório, 2012. Citado na página 16.
- RIMA, I. H. *História do Pensamento Econômico*. São Paulo: Moderna, 1987. Citado na página 22.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais*. São Paulo: Moderna, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

SANCHES, L. C. F.; SOUSA, F. dos S. Uso de edo's no crescimento demográfico do município de santa fé do sul através dos modelos de malthus e verhulst. *Anais do I Congresso de Matemática Aplicada e Computacional da Região Sudeste – I CMAC Sudeste*, São Paulo, 2011. Citado na página 15.

SETI, B. D. et al. Estudo da dinâmica populacional usando os modelos de malthus e verhulst: uma aplicação à população de passo fundo. *Revista Teoria e Evidência Econômica*, v. 7, n. 12, p. 137–143, 1999. Citado na página 11.

TAVONI, R. *Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, abril 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92412/tavoni_r_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 24.05.2017. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Matemática Avançada para Engenharia Equações diferenciais elementares e transformada de Laplace*. Porto Alegre: Moderna, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

Anexos

ANEXO A – Principais Comandos do wxMaxima

A.1 lsquares

lsquares é uma coleção de funções para implementar o método dos mínimos quadrados, serve para estimar parâmetros para um modelo a partir de dados numéricos. A função lsquares permite um ajuste para qualquer tipo de curva. Deve-se utilizar o comando load:

```
-> load("lsquares");
```

lsquares_estimates é uma lista com um único elemento que, por sua vez, é a lista de estimativas dos parâmetros que procuramos. Isso ocorre porque o Maxima é capaz de fazer várias configurações simultaneamente e retorna uma lista de soluções para cada problema. lsquares_estimates primeiro procura uma solução exata, e se isso falhar, então procura uma solução aproximada. Deve-se estimar os parâmetros a para se adequar melhor a equação e nas variáveis x e aos dados D , conforme determinado pelo método dos mínimos quadrados.

```
-> lsquares_estimates(D,x,e,a);
```

lsquares_mse retorna o erro quadrado médio (do inglês, *mean squared error*, MSE), uma expressão de soma, para a equação e nas variáveis x , com dados D .

```
-> mse:lsquares_mse(D,x,e);
```

lsquares_residual_mse retorna o erro quadrado médio residual (MSE) para a equação e com os parâmetros especificados a e os dados D .

```
-> lsquares_residual_mse(D,x,e,a);
```

A.2 plsquares

Ao contrário da função lsquares_estimates que permite um ajuste para qualquer tipo de curva, a função plsquares busca obrigatoriamente o melhor ajuste para uma função do tipo polinômio. Carrega-se o comando load:

```
-> load("plsquares");
```

O comando plsquares é um ajuste polinomial multivariável de uma tabela de dados

pelo método dos mínimos quadrados. *Mat* é uma matriz contendo os dados, *VarList* é uma lista de nomes de variáveis, *depvars* é o nome de uma variável dependente.

```
->    plsquares(Mat,VarList,depvars);
```

A.3 lbfgs

O lbfgs é uma implementação do algoritmo L-BFGS para resolver problemas de minimização sem restrições através de um algoritmo de quase-memória com quase-Newton (BFGS) de memória limitada, denominado dessa maneira para referir-se aos idealizadores da técnica: Broyden, Fletcher, Goldfarb e Shanno. É chamado de método de memória limitada porque uma aproximação de baixa classificação da inversa da matriz de Hessian é armazenada em vez de todo o inverso de Hessian.

```
->    load(lbfgs);
```

A.4 stats

O pacote *stats* contém um conjunto de procedimentos de inferência clássica estatística e procedimentos de teste. Seu comando é dado por,

```
->    load("stats");
```

`simple_linear_regression` (Regressão linear simples) é um método estatístico que nos permite resumir e estudar relações entre duas variáveis contínuas (quantitativas), o argumento *x* deve ser uma matriz de duas colunas ou uma lista de pares. A saída da função `simple_linear_regression` é um objeto de inferência do Maxima com os seguintes resultados:

```
->    simple_linear_regression(x);
```

A função `plot2d` representa um ou mais gráficos em duas dimensões. Expressões ou nomes de funções que são usados para definir curvas dependem de uma única variável *var*, sendo obrigatória para usar *xrange* para nomear essa variável e dá a sua valores máximos usando a seguinte sintaxe mínimo e: `[variable,min,max]`

Um gráfico também pode ser definido de forma discreta. A forma discreta é usada para desenhar um conjunto de pontos de coordenadas dados. Um gráfico discreto é definido como uma lista que começa com a palavra-chave `discreta` seguida por uma ou duas listas de valores numéricos. Quando há duas listas, ambas devem ser de igual comprimento, a primeira é interpretada como a abscissa e a segunda como ordenada.

Assim o comando para plotar o gráfico é:

→ `plot2d([[discrete,dados],f(x)],[x,0,13],[style,[points,1,5],[lines,1,4]],[legend,"dados experimentais","modelo calculado"],[xlabel,"Anos(t)],[ylabel,"Populacao(P)"]);`

Obtendo-se assim o gráfico.

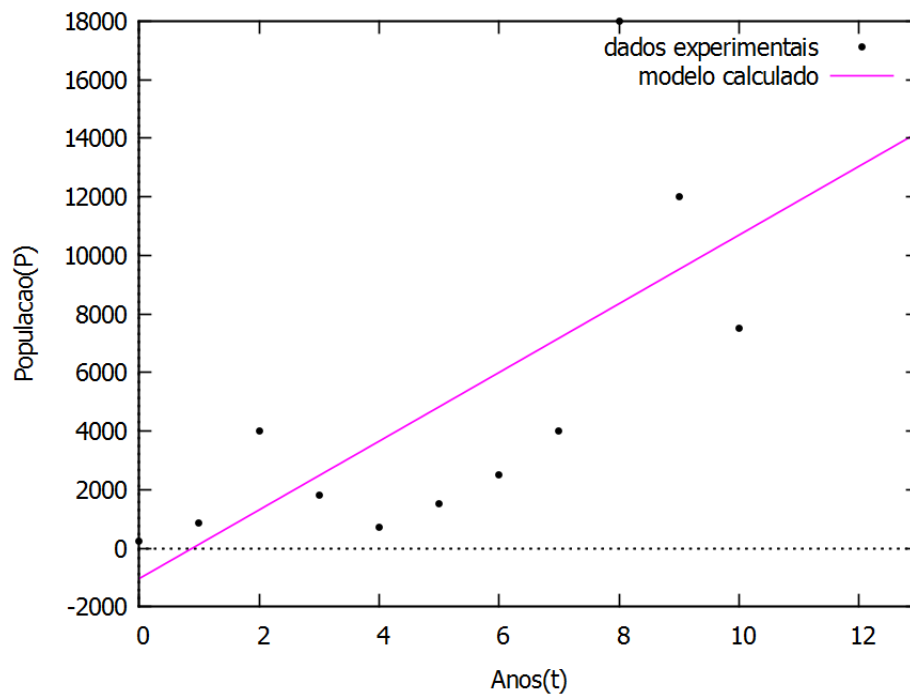


Figura 30 – Gráfico obtido do comando *plot2d*

ANEXO B – Resultado dos polinômios para as Situações A, B e C

B.1 3.2.3 Situação A

Pode-se analisar a representação gráfica do modelo polinomial conforme a função (3.28)

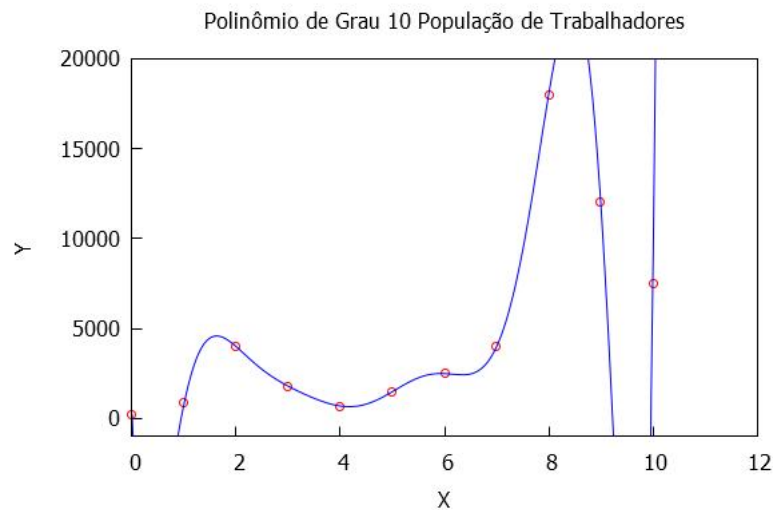


Figura 31 – Modelo Polinomial

A partir da Figura 31 pode-se verificar que o polinômio de décimo grau é o que melhor ajusta os pontos do nosso modelo, entretanto, tem-se novamente a situação $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{10}(x) = +\infty$.

Na Figura 32 são ilustrados gráficos de polinômios de graus diferentes que não modelam o estudo em questão.

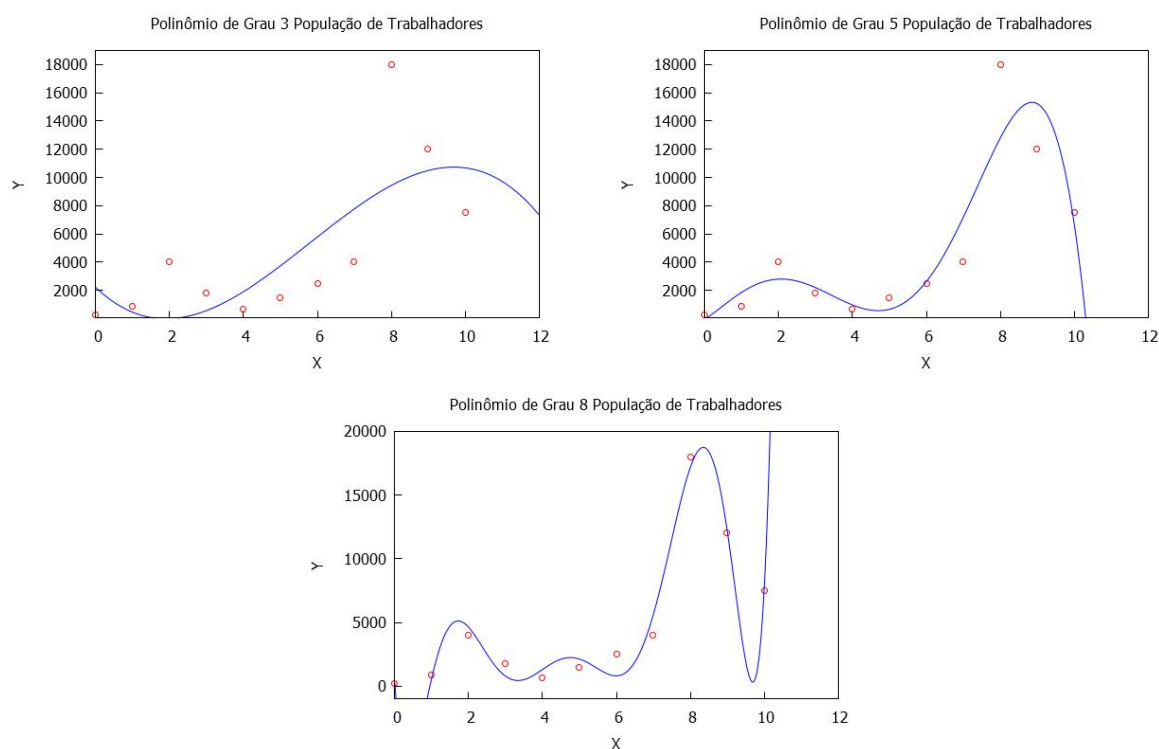


Figura 32 – Conjunto de figuras dos polinômios de grau 3, 5 e 8

B.2 3.4.3 Situação B

Na Tabela 32 é apresentada a estimativa dos modelos para os anos entre 2005 e 2017.

Tabela 32 – Análise dos modelos comparados a Situação B

Ano	População Real	Ajuste Linear	Ajuste Exponencial (3.39)	Ajuste Polinomial
2005	250	1516	1396	250
2006	850	1953	1462	850
2007	4000	2390	1532	4000
2008	1800	2827	1605	1800
2009	700	3264	1681	700
2010	1500	3701	1761	1500
2011	2500	4138	1844	2500
2012	4000	4576	1932	4000
2013	18000	5013	2023	18000
2014	12000	5450	2120	12000
2015	7500	5887	2220	7500
2016	600	6324	2326	600
2017	100	6761	2436	100

Com base nos resultados apresentados na Tabela 32, pode-se perceber novamente que a aproximação polinomial é a que melhor ajusta os pontos, entretanto ela não pode ser empregada para estimar a população de trabalhadores do Polo Naval para anos futuros, uma vez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{12}(x) = +\infty$.

B.3 3.5.3 Situação C

Pode-se analisar a representação gráfica do modelo polinomial conforme a função 3.46

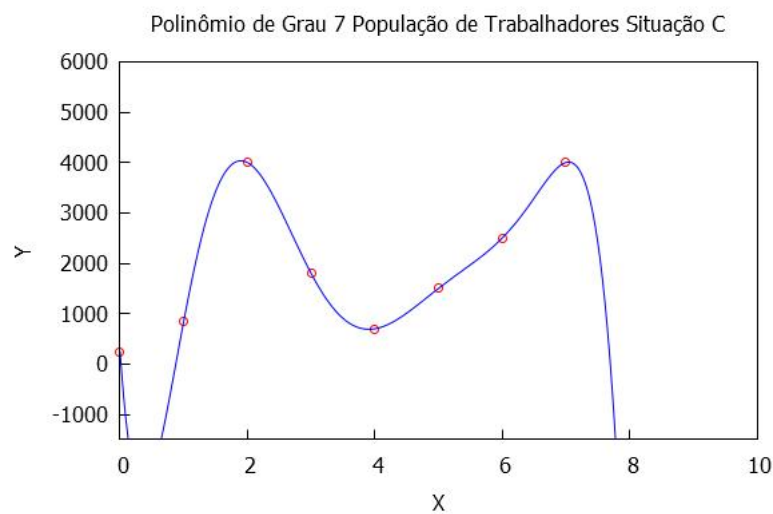


Figura 33 – Modelo Polinomial Situação C

A partir da Figura 33 pode-se verificar que o polinômio de sétimo grau foi o que melhor se ajustou ao nosso modelo. Entretanto o ajuste polinomial não pode ser utilizado para estimar a população de trabalhadores, uma vez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_7(x) = -\infty$.

Na Figura 34 são ilustrados gráficos de polinômios de graus diferentes que não modelam o estudo em questão.

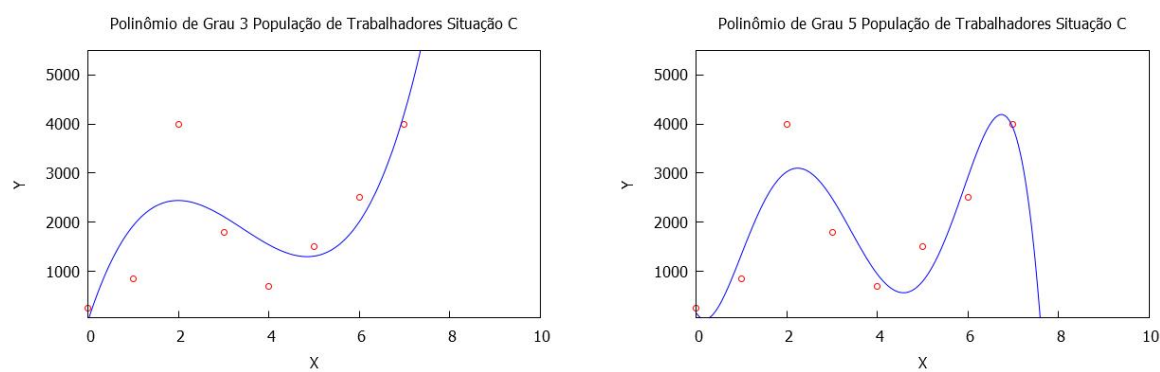


Figura 34 – Conjunto de figuras dos polinômios de grau 3 e 5