

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA
CURSO DE MATEMÁTICA APLICADA

Douglas Chielle

A Transformada de Radon e a Tomografia Computadorizada

Rio Grande
2012

Douglas Chielle

A Transformada de Radon e a Tomografia Computadorizada

Monografia apresentada ao Curso de Matemática Aplicada da FURG, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em Matemática Aplicada.

Orientador: Adriano De Cezaro

Doutor em Matemática - IMPA

Rio Grande

2012

Chielle, Douglas

A Transformada de Radon e a Tomografia Computadorizada / Douglas Chielle - 2012

54.p

1.Problemas Inversos 2. Análise Numérica.. I.Título.

CDU 517.9

Douglas Chielle

A Transformada de Radon e a Tomografia Computadorizada

Monografia apresentada ao Curso de Matemática Aplicada da FURG, como requisito para a obtenção parcial do grau de BACHAREL em Matemática Aplicada.

Aprovado em 01 de junho de 2012

BANCA EXAMINADORA

Adriano De Cezaro

Doutor em Matemática - IMPA

Fabiana Travessini De Cezaro

Doutor em Matemática - UFRJ

Mario Rocha Retamoso

Doutor em Engenharia Mecânica - UFRGS

À meus pais.

Aos meus irmãos.

*"O homem sensato adapta-se ao mundo.
O homem insensato insiste em tentar adap-
tar o mundo a si. Sendo assim, qualquer
progresso depende do homem insensato".*

Bernard Shaw

Agradecimentos

Quero agradecer aos meus pais, Márcia e Roque, e irmãos, Daniel, Eduardo e Gustavo, que apesar de estarem longe, sempre se fizeram presentes.

Ao meu orientador Prof. Dr. Adriano De Cezaro, meus sinceros agradecimentos por sua serenidade, paciência e por sempre estar disposto a ajudar e distribuir conhecimento, não só no período em que este trabalho foi escrito, mas também durante os três anos em que foi meu orientador de iniciação científica.

Por fim, agradeço aos colegas do curso de Matemática Aplicada por todos os momentos, de felicidade ou desespero, vividos nos últimos quatro anos. Da mesma forma, deixo meu obrigado aos professores do IMEF por todo o conhecimento, não só acadêmico, que foi compartilhado com excelência e qualidade durante o período de graduação.

Resumo

Este trabalho trata do estudo da Transformada de Radon, a qual é crucial na Tomografia Computadorizada. Primeiramente é feita uma generalização da Transformada de Radon a partir de um caso particular, com motivação física. Em seguida, são apresentadas propriedades dessa transformada, incluindo a boa colocação, injetividade e fórmulas de inversão. É apresentado um modelo discretizado da Transformada de Radon e são exibidos os métodos Técnica de Reconstrução Algébrica (ART), Retroprojeção Filtrada (FBP) e Decomposição em Valores Singulares (SVD), que são métodos de reconstrução de imagens. Por fim, é feita uma implementação, verificação e teste de eficácia em cada um dos métodos citados anteriormente.

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Introdução | 7 |
| 1 O Modelo Matemático | 12 |
| 1.1 Integração sobre Hiperplanos | 14 |
| 1.2 A Transformada de Radon | 18 |
| 2 Propriedades da Transformada de Radon | 20 |
| 2.1 Boa Colocação da Transformada de Radon | 20 |
| 2.2 Propriedades da Transformada de Radon | 23 |
| 2.3 Injetividade da Transformada de Radon | 30 |
| 2.4 Existência de uma Fórmula de Inversão | 33 |
| 2.5 Relação entre a Fórmula de Inversão e Problemas Mal-Postos | 33 |
| 3 Modelo Discreto | 36 |
| 3.1 Modelo Discretizado | 36 |
| 3.2 Técnica de Reconstrução Algébrica (ART) | 38 |
| 3.2.1 Convergência do ART | 39 |
| 3.3 Retroprojeção Filtrada (FBP) | 45 |
| 3.4 Decomposição em Valores Singulares (SVD) | 46 |
| 4 Resultados Numéricos | 49 |
| 4.1 Implementação | 49 |
| 4.1.1 Técnica de Reconstrução Algébrica | 50 |
| 4.1.2 Retroprojeção Filtrada | 50 |
| 4.1.3 Decomposição em Valores Singulares | 51 |

| | | |
|-----|-----------------------------------|-----------|
| 4.2 | Análise dos Resultados | 52 |
| | Referências Bibliográficas | 54 |

Introdução

A tomografia computadorizada (TC) baseia-se nos mesmos princípios que a radiografia convencional, segundo os quais tecidos com diferentes composições absorvem a radiação X de forma diferente. Ao serem atravessados por raios X, tecidos mais densos (como o fígado) ou com elementos mais pesados (como o cálcio presente nos ossos), absorvem mais radiação que tecidos menos densos (como o pulmão, que está cheio de ar).

Assim, uma TC indica a quantidade de radiação absorvida por cada parte do corpo analisada (radiodensidade), e traduz essas variações numa escala de cinzentos, produzindo uma imagem. Cada pixel da imagem corresponde à média da absorção dos tecidos nessa zona, expresso em unidades de Hounsfield (em homenagem ao criador da primeira máquina de TC). [16]

A base do problema de reconstrução de imagens médicas por Tomografia Computadorizada é, indubitavelmente, matemática. Em especial, tal matemática influenciou o desenvolvimento de novos métodos e técnicas matemáticas para a obtenção de uma solução para o problema de reconstruções de imagens, bem como, o desenvolvimento de outros campos científicos.

Tudo começou no final do século IX onde o Prof. Wilhelm Conrad Röntgen, no laboratório na Baviera, sul da Alemanha, descobriu os raios X. Num dado momento, enquanto investigava a capacidade de vários materiais de reterem os raios, Röntgen colocou uma peça de chumbo em posição enquanto ocorria uma descarga e viu aí a primeira imagem radiográfica. Em entrevista a um reporter de nome H. J. W. Dam, da revista canadense McClure's Magazine, Röntgen descreveu: “Eu estava trabalhando com tubos Crooke cobertos com uma proteção de papelão preto. Um pedaço de papel de platinocianoide de bário estava sobre o banco. Eu vi passar uma corrente através do tubo e notei uma linha escura peculiar sobre o papel.”

Röntgen decidiu investigar sobre este assunto. Para isto convenceu D. Bertha, sua esposa, a colocar a mão sobre um filme fotográfico em chassi de papel e ligou o tubo durante 15 minutos. O filme revelado mostrou claramente a imagem dos ossos da mão de D. Bertha. Com isso uma nova era na ciência estava inaugurada.



Figura 1: Uma imagem de raios X, feita em 1896 por Röntgen, da mão esquerda de sua esposa. Fonte: Wikipedia.

Ciente da importância de sua descoberta, o Prof. Röntgen passou os últimos dias de dezembro a redigir o artigo que submeteu ao Secretário da Sociedade Físico-Médica de Wurzburg, solicitando sua publicação no *SITZUNGSBERICHTE* da Sociedade, embora não tivesse o trabalho sido apresentado em uma das reuniões da Sociedade. Assim foi feito e no exemplar de dezembro de 1895 daquela revista saiu publicado o “EINE NEURE ART VON STRAHLEN” (sobre uma nova espécie de raios), que ele chamou de raios X por não saber realmente do que se tratava, sendo X a incógnita da matemática. Röntgen recebeu em 1901, por este trabalho, o Prêmio Nobel de Física.

Já no início do século XX, o matemático austríaco Johann Radon desenvolveu uma equação matemática, a Transformada de Radon, que futuramente seria a base da tomografia computadorizada. Radon demonstrou que um objeto tridimensional poderia ser reproduzido a partir de um conjunto de projeções. Este conceito foi fundamentado para a tomografia computadorizada algumas décadas depois.

A contribuição matemática fundamental para o problema da reconstrução foi feita em 1963 e 1964 por Allan Cormack, físico e matemático. Ele estudava a distribuição dos coeficientes de atenuação do corpo para que o tratamento por radioterapia pudesse ser mais bem direcionado para o tumor alvo. Além do mais, Cormack estava desenvolvendo um algoritmo matemático para a reconstrução tridimensional da distribuição de concentração de radionuclídeos a partir dos dados coletados de um equipamento de “câmera-pósitron” desenvolvido em 1962.

A questão que Cormack respondeu foi: “Supondo que se conheçam todas as li-

nhas integrais através de um corpo de densidade variada, podemos reconstruir esse mesmo corpo?” A resposta foi positiva, e ainda mais construtiva, a partir das informações obtidas pelos raios X. Em termos práticos, sabe-se que uma radiografia mostra informações limitadas porque certas estruturas são obscurecidas por outras de densidade maior. Podemos tirar mais informação se pudermos ver dentro do objeto, que foi o que Radon nos disse, pelo menos em princípio, tornando seu teorema uma ferramenta prática. Para a reconstrução feita por Cormack, a Transformada de Radon invertida foi a base matemática. [5]

Em 1972, juntamente com a EMI Ltda., Godfrey Newbold Hounsfield, engenheiro elétrico e inventor, desenvolveu o primeiro aparelho de tomografia computadorizada, restrito apenas a imagem do encéfalo e crânio. A partir da venda de aproximadamente 200 milhões de LPs da banda inglesa The Beatles em 1968, a EMI Ltda. conseguiu verba suficiente para o patrocínio dos estudos e experiências desenvolvidas. Para a realização desta invenção, Hounsfield previu um sistema de diagnóstico no qual uma máquina de raio X faria com que uma imagem fosse feita em fatias finas através do corpo do paciente e um computador deveria processar as fatias em uma representação exata, que iria mostrar os tecidos, órgãos e outras estruturas em maior detalhe. Juntamente com Cormack, Hounsfield recebeu o prêmio Nobel de Medicina de 1979.

Para obter uma tomografia computadorizada, o paciente é colocado numa mesa que se desloca para o interior de um anel de cerca de 70 cm de diâmetro. À volta deste encontra-se uma ampola de Raios X, num suporte circular designado gantry. Do lado oposto à ampola encontra-se o detector responsável por captar a radiação e transmitir essa informação ao computador ao qual está conectado. Nas máquinas sequenciais ou de terceira geração, durante o exame, o “gantry” descreve uma volta completa (360°) em torno do paciente, com a ampola a emitir raios X, que após atravessar o corpo do paciente são captados na outra extremidade pelos detectores (ver figura 2). Esses dados são então processados pelo computador, que analisa as variações de absorção ao longo da seção observada, e reconstrói esses dados sob a forma de uma imagem. A “mesa” avança então mais um pouco, repetindo-se o processo para obter uma nova imagem, alguns milímetros ou centímetros mais abaixo.

A principal vantagem da tomografia computadorizada é que permite o estudo de “cortes” ou seções transversais do corpo humano vivo, ao contrário do que é dado pela radiologia convencional, que consiste na representação de todas as estruturas do

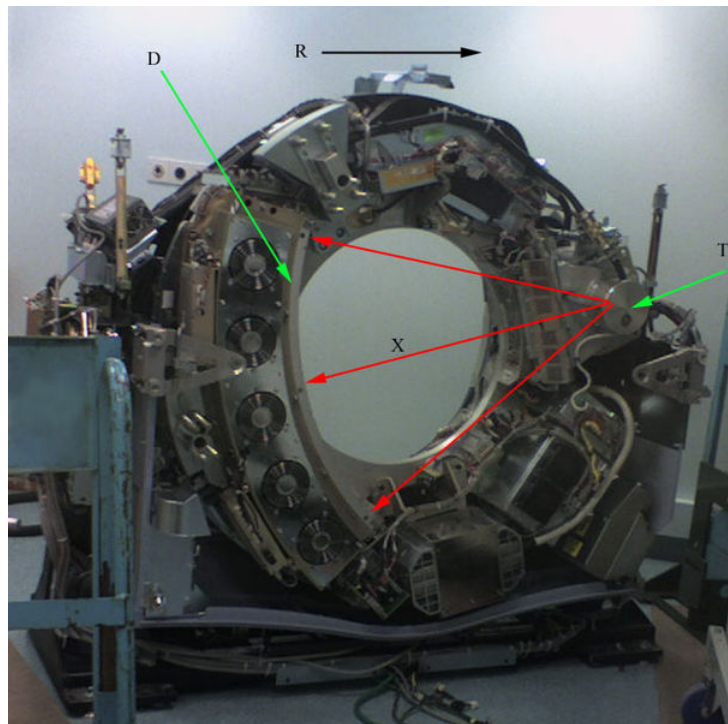


Figura 2: Interior de um moderno scanner de TC. T - Tubo de raio X; D - Detectores de raio X; X - Emissor de raio X; R - Gantry. Fonte: Wikipedia.

corpo sobrepostas. Assim, é obtida uma imagem em que a percepção espacial é mais nítida. Outra vantagem consiste na maior distinção entre dois tecidos. A TC permite distinguir diferenças de densidade da ordem 0,5% entre tecidos, ao passo que na radiologia convencional este limiar situa-se nos 5%. Desta forma, é possível a detecção ou o estudo de anomalias que não seriam visualizadas em radiografias comuns, ou através de métodos invasivos, sendo assim um exame complementar de diagnóstico de grande valor.

Este trabalho de conclusão de curso está assim dividido: No capítulo 1 é feita a derivação do modelo matemático por trás da tomografia computadorizada, explicando e definindo propriedades sobre integração em hiperplanos para que possamos chegar na Transformada de Radon.

No capítulo 2, falamos sobre propriedades importantes da Transformada de Radon, tais como: boa colocação, injetividade, existência de uma fórmula inversa, dentre outros.

No capítulo 3, é apresentado a discretização da Transformada de Radon. Além disso, são apresentados alguns métodos que visam resolver o problema de reconstruções de imagens por tomografia computadorizada.

Finalmente, no capítulo 4 apresentamos resultados de implementações numéricas dos métodos estudados no capítulo 3.

1 O Modelo Matemático

O problema essencial da Tomografia Computadorizada é determinar a estrutura interna de um meio usando resultados de medidas de radiação que o atravessa.

Fisicamente, qualquer raio que passe por um obstáculo é atenuado, e com o raio X não é diferente. A atenuação da intensidade de radiação medida pelo detector que está do lado oposto à fonte de emissão, com relação a um obstáculo homogêneo, pode ser modelada por um único coeficiente de absorção μ . Seja ξ a reta pela qual está direcionado o feixe de fótons de raio X. Considere I_0 a intensidade da aplicação de feixe fótons de raio X e seja I a intensidade após passar por Ω (veja 1.1). [6]

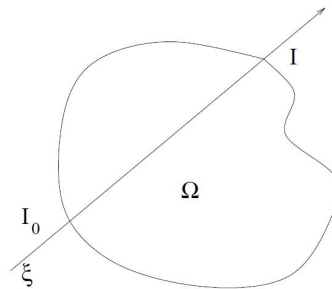


Figura 1.1: Raio X incidente e emergente.

Com esse modelo simples, podemos deduzir que a atenuação total de um feixe de raio X monocromático pode ser calculada da seguinte forma: a intensidade de radiação I - que é proporcional ao número de fótons - depois de percorrer uma distância Δx através de um objeto, pode ser determinada por

$$I(x + \Delta x) = I(x) - \mu(x)I(x)\Delta x. \quad (1.1)$$

Em outras palavras, a intensidade da radiação remanescente no ponto $x + \Delta x$ é igual a intensidade de radiação no ponto x , descontada a quantidade de radiação absorvida pelo coeficiente de absorção μ .

Reordenando a equação (1.1), obtemos

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = -\mu(x)I(x). \quad (1.2)$$

Agora, tomando o limite em (1.2) nos leva a seguinte equação diferencial

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = \frac{dI}{dx} = -\mu(x)I(x). \quad (1.3)$$

Neste ponto surge a seguinte dúvida: Em que condições a EDO (1.3) possui solução? Será que tal solução é única?

Antes de seguirmos na análise de tais perguntas, vamos olhar para o Teorema de Existência e Unicidade de soluções para EDOs, teorema este que também é conhecido como Teorema de Picard-Lindelof.

Teorema 1.0.1. *Seja*

$$g : [I_0 - a, I_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(I(x), x) \rightarrow g(I(x), x)$$

tal que $g(I(x), x)$ é uma função contínua com relação a x e Lipschitz com relação a $I(x)$, isto é, $|g(I(x), x) - g(I(y), y)| \leq L|I(x) - I(y)|, \forall I(x), I(y) \in \mathbb{R}$ para algum L positivo. Então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}I(x) = g(I(x), x) \\ I(x_0) = I_0 \end{cases}$$

possui uma única solução no intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Demonstração : Ver [3].

Vamos analisar a EDO (1.3), onde $g(I(x), x) = -\mu(x)I(x)$.

Corolário 1.0.2. *Suponha que μ seja limitada em Ω . Então a EDO (1.3) possui uma única solução.*

Demonstração : Basta mostrar que $g(I(x), x) = -\mu(x)I(x)$ satisfaz a condição de Lipschitz. De fato,

$$\begin{aligned} |g(I(x), x) - g(I(y), x)| &= |-\mu(x)I(x) + \mu(x)I(y)| \\ &= |\mu(x)||I(x) - I(y)| \\ &\leq L|I(x) - I(y)| \end{aligned}$$

onde L é tal que $|\mu(x)| \leq L, \forall x \in \Omega$. ■

Agora que sabemos as condições para que a EDO (1.3) tenha uma única solução, podemos continuar sua resolução. Aplicando o método de separação de variáveis em (2.4) e integrando ao longo da reta ξ , obtemos

$$\ln I = - \int_{\xi} \mu(x) dx + c. \quad (1.4)$$

Aplicando a exponencial,

$$I = c_1 \exp - \int_{\xi} \mu(x) dx \quad (1.5)$$

e, finalmente, com a condição inicial $I(0) = I_0$, obtemos

$$I = I_0 \exp - \int_{\xi} \mu(x) dx \quad (1.6)$$

O coeficiente de absorção μ compreende os efeitos de absorção e espalhamento de raio X. Por simplicidade, consideraremos nulos os efeitos de espalhamento. Note que, pelo corolário 1.0.2, μ pode ser uma função constante por partes em Ω .

A equação (1.6) é conhecida como lei de Lambert-Beer. [4]

1.1 Integração sobre Hiperplanos

Observando que lei de Lambert-Beer, obtida em (1.6), é uma equação unidimensional, surge a pergunta: É possível generalizar a equação (1.6) para dimensões maiores?

Sabemos que uma reta no plano pode ser descrita pela equação linear da forma $a_1x_1 + a_2x_2 = c$. Já o plano euclidiano consiste em todos os pontos x da forma (x_1, x_2) , onde x_1 e x_2 são números reais. Podemos generalizar esta noção da seguinte forma:

Definição 1.1.1 (Hiperplano). *Um hiperplano no \mathbb{R}^n é o conjunto de pontos $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo uma equação da forma*

$$\langle \theta, x \rangle = c \quad (1.7)$$

onde $\theta \in S^{n-1}$ é um vetor unitário e c é um número real.

Note que a definição acima faz todo sentido. Por exemplo, seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\theta = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Então, $\langle \theta, x \rangle = a_1x_1 + a_2x_2 = c$, o que define uma reta em \mathbb{R}^2 ortogonal a θ e com uma distância c da origem.

Hiperplanos em \mathbb{R}^2 são retas, que sabemos ser unidimensional. Já em \mathbb{R}^3 , um hiperplano é um plano euclidiano (bidimensional), pois $x = (x_1, x_2, x_3), \theta = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \langle \theta, x \rangle = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c$. Como já se pode imaginar, em \mathbb{R}^n , um hiperplano tem $n - 1$ dimensões.

Nossa ideia agora é definir a Transformada de Radon para dimensões maiores usando a integral $\int_{\xi} f(x) dx$ trocando a reta ξ por um hiperplano qualquer. Antes de fazer isso, precisamos estudar hiperplanos e integrais em hiperplanos.

Definição 1.1.2. Se $\theta \in S^{n-1}$, então θ^\perp denota o espaço linear ortogonal a θ , mais precisamente,

$$\theta^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = 0\} \quad (1.8)$$

A definição 1.1.2 decorre diretamente da definição de ortogonalidade entre dois vetores, $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|\cos\alpha$. Logo, se x e y são ambos não nulos, $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.1.3. Um subconjunto H de \mathbb{R}^n é um hiperplano ortogonal ao vetor θ a uma distância s da origem se, e somente se, $H = \theta^\perp + s\theta$.

Se H é o hiperplano $\langle \theta, x \rangle = s$ e se $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n , então

$$H = \{x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \dots + x_{n-1}\theta_{n-1} + s\theta : x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\} \quad (1.9)$$

Demonstração : Ver [9]. ■

Observação 1.1. O tipo de integral aqui utilizado será a integral de Lebesgue, que é uma generalização do integral de Riemann. A integral de Lebesgue apresenta diversas vantagens em relação ao integral de Riemann, sobretudo em relação aos processos de limite. Além disso, a integral de Lebesgue é uma construção matemática generalizável para funções definidas em um espaço de medida, assumindo valores reais ou complexos, ou mesmo, em um espaço de Banach geral.

Uma ótima referência sobre este assunto é o livro “The Elements of Integration and Lebesgue Measure”, de Robert G. Bartle [2].

A seguir apresentamos um exemplo de uma função Lebesgue integrável, mas que não é integrável a Riemann.

Exemplo 1.1.4. Seja a função

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

chamada de função de Dirichlet. Esta função não é integrável a Riemann em nenhum intervalo do tipo $[a, b]$, $a < b$, pois seu supremo é 1 e ínfimo é 0, em qualquer partição do intervalo. Por outro lado, como o conjunto dos números racionais é um conjunto de medida nula [7], $D(x) = 0$. Sendo assim, $D(x)$ é uma função mensurável à Lebesgue e sua integral de Lebesgue é nula em qualquer conjunto mensurável.

Com a noção e algumas definições de hiperplanos já apresentadas, vamos agora estudar integrais em hiperplanos.

Teorema 1.1.5 (Mudança de Variáveis na Integração). *Seja g uma função continuamente diferenciável de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n . Se f é uma função integrável em \mathbb{R}^n e se U é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n , então*

$$\int_{g(U)} f(x) dx = \int_U f(g(y)) Jg(y) dy \quad (1.10)$$

onde Jg é o determinante do Jacobiano.

Definição 1.1.6 (Jacobiano). *Seja g uma função de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n que possui primeira derivada parcial em todas as variáveis. Defina a matriz:*

$$g'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

e defina o Jacobiano de g por

$$Jg(x) = \|\det(g'(x))\|. \quad (1.11)$$

Seja x um elemento de \mathbb{R}^n , podemos definir

$$x' = (x_1, \dots, x_k) e$$

$$x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Esta notação é útil para o teorema que segue.

Teorema 1.1.7 (Teorema de Fubini). *Se f é uma função integrável em \mathbb{R}^n , então a função atribuindo $x'' \in \mathbb{R}^{n-k}$ para $\int_{x' \in \mathbb{R}^k} f(x', x'') dx'$ é integrável. Portanto, $\int_{x' \in \mathbb{R}^k} f(x', x'') dx'$ existe para quase todos $x'' \in \mathbb{R}^{n-k}$. Além disso*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{x'' \in \mathbb{R}^{n-k}} \left(\int_{x' \in \mathbb{R}^k} f(x', x'') dx' \right) dx'' \\ &= \int_{x' \in \mathbb{R}^k} \left(\int_{x'' \in \mathbb{R}^{n-k}} f(x', x'') dx'' \right) dx' \end{aligned} \quad (1.12)$$

Da mesma forma, se a função atribuindo $x'' \in \mathbb{R}^{n-k}$ para $\int_{x' \in \mathbb{R}^k} |f(x', x'')| dx'$ é integrável em \mathbb{R}^{n-k} , então f é integrável em \mathbb{R}^n e a equação anterior continua valendo.

As demonstrações do Teorema de Mudança de Variáveis (1.1.5) e do Teorema de Fubini (1.1.7) podem ser encontradas em [15].

Um caso importante do teorema de Mudança de Variáveis ocorre quando g é uma transformação linear com determinante ± 1 e conjunto $U = \mathbb{R}^n$. Denotando esta transformação linear por A e aplicando o teorema com $g = A$, obtemos

Corolário 1.1.8. *Uma transformação linear com determinante ± 1 não interfere na integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(A(y))dy \quad (1.13)$$

Outro resultando importante para nosso estudo é a invariância da integral sobre translações. Seja $f_a = f(x - a)$ a função que translada f pelo vetor a . Esta translação é da forma $f \circ T$ onde $T(x) = x - a$. É claro que o Jacobiano de T é identicamente igual a 1 e podemos obter o seguinte resultado:

Corolário 1.1.9. *A integral é invariante sob translações: se a é um ponto fixo em \mathbb{R}^n , então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_a(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - a)dx \quad (1.14)$$

Sabemos, da algebra linear, que uma transformação linear é dita ortonormal se esta preserva tamanhos, isto é, $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, uma transformação linear é ortogonal se, e somente se, sua matriz associada é ortogonal. Por outro lado, matrizes ortogonais geram transformações lineares com determinante ± 1 e isto nos leva ao corolário:

Corolário 1.1.10. *Se $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n\}$ é uma base ortonormal do \mathbb{R}^n , então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \dots + y_{n-1}\theta_{n-1} + y_n\theta_n)dy \quad (1.15)$$

Observação 1.2. *O corolário 1.1.10 é muito útil quando queremos expressar $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ em um sistema de coordenadas mais natural. Se $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n\}$ é uma base ortonormal do \mathbb{R}^n , então a expressão*

$$x = y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \dots + y_{n-1}\theta_{n-1} + y_n\theta_n$$

é tão válida quanto

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Uma consequência importante destes teoremas que foram apresentados é a utilização de coordenadas polares: se f é integrável no plano, então

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r(\cos \alpha, \sin \alpha)) r dr d\alpha \quad (1.16)$$

e, reciprocamente, se a integral do lado direito existe, então f é integrável no plano. Como $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ é um vetor unitário do \mathbb{R}^2 , podemos generalizar a equação 1.16 fazendo a integral sobre S^1 . Então, usando $\theta = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, podemos reescrever a equação anterior por

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x) dx = \int_{S^1} \int_0^\infty f(r\theta) r dr d\theta$$

De forma indutiva, fazendo uso do teorema de mudança de variáveis 1.1.5 e do teorema de Fubini 1.1.7, podemos generalizar a fórmula das coordenadas polares para o \mathbb{R}^n ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(r\theta) r^{n-1} dr d\theta \quad (1.17)$$

De acordo com o plano para a generalização da lei de Lambert-Beer (1.6), precisamos saber integrar funções f definidas em \mathbb{R}^n sobre hiperplanos $\langle \theta, x \rangle = s$. Portanto, precisamos da seguinte definição

Definição 1.1.11 (Integração sobre Hiperplanos). *Dado um hiperplano H definido por $\langle \theta, x \rangle = s$ e uma função f definida em \mathbb{R}^n , seja $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}\}$ uma base ortonormal para θ^\perp . Então, sendo $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, definimos a integral sobre hiperplanos de f sobre H por*

$$\int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx = \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \dots + x_{n-1}\theta_{n-1} + s\theta) dx' \quad (1.18)$$

Observação 1.3. *Se $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n , então $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de θ^\perp . A proposição 1.1.3 mostra que o integrando é um elemento do hiperplano $\langle \theta, x \rangle = s$ e isto justifica a definição.*

1.2 A Transformada de Radon

Agora estamos em posição de definir a Transformada de Radon.

Definição 1.2.1 (Transformada de Radon). *A Transformada de Radon é um operador \mathcal{R} definido em $L^1(\mathbb{R}^n)$ onde, para qualquer função integrável f em \mathbb{R}^n , a função $\mathcal{R}f$ é definida para $\theta \in S^{n-1}$ e $s \in \mathbb{R}$ por*

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = \int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx \quad (1.19)$$

sempre que esta integral existir.

Note que, no caso em que $n = 1$, temos que

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = \ln \frac{I(x)}{I_0} = \int_{\langle \theta, x \rangle = s} -f(x) dx$$

com $f(x) = \mu(x)$.

O problema inverso associado a tomografia consiste em encontrar uma aproximação apropriada para a distribuição de densidade f através da medida de várias seções transversais em diferentes ângulos da região Ω . Assim, a solução do problema inverso de reconstruir a densidade f consiste em inverter o operador \mathcal{R} (em um espaço de funções adequado).

A aplicação desta ideia é imediata em detecção de tumores. Suponha que um médico deseja obter informações sobre a presença de anomalias em diferentes tecidos do corpo humano. A presença de tais anomalias implicam em diferença nos coeficientes de absorção dos tecidos. Assim, determinar o coeficiente de absorção f significa determinar a presença, ou não, de anomalias, [6].

Disto, surge uma pergunta: é possível determinar o coeficiente de absorção f a partir de sua integral de linha (1.19) ao longo do hiperplano $\langle \theta, x \rangle = s$?

Na tentativa de responder a pergunta acima, várias outras perguntas vem a tona:

1. Sob quais condições a integral definida em (1.19) existirá?
2. \mathcal{R} é injetiva?
3. É possível encontrar uma fórmula para a inversa de \mathcal{R} ?

Responderemos estas perguntas, junto com outras propriedades da Transformada de Radon, no próximo capítulo.

2 Propriedades da Transformada de Radon

No capítulo anterior definimos a Transformada de Radon de uma maneira generalizada, partindo de um caso particular que possui uma motivação física. Neste capítulo apresentaremos algumas propriedades importantes da Transformada de Radon. Vale ressaltar que a grande maioria dos resultados aqui apresentados foram retirados de [9], com algumas adaptações.

2.1 Boa Colocação da Transformada de Radon

Começaremos apresentando um teorema importante que será utilizado inúmeras vezes no decorrer do capítulo. Em especial, o teorema abaixo garante que a Transformada de Radon (1.19) está bem definida.

Proposição 2.1.1 (Teorema de integração sobre hiperplanos). *Seja $\theta \in S^{n-1}$. Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx$ existe para quase todo $s \in \mathbb{R}$, independentemente da base ortonormal usada para definir o hiperplano. Além disso*

$$\int_{s=-\infty}^{\infty} \int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx ds = \int_{\mathbb{R}^n} f(w) dw. \quad (2.1)$$

Demonstração : Seja $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta\}$ uma base ortonormal do \mathbb{R}^n . A transformação linear, que troca coordenadas de uma base ortonormal do \mathbb{R}^n para outra, é ortogonal. Aplicando esta ideia para a base canônica de \mathbb{R}^n e a base dada temos, pelo Corolário 1.1.10, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \dots + y_{n-1}\theta_{n-1} + y_n\theta) dy.$$

Agora, aplicando o Teorema de Fubini na integral do lado direito, temos, para quase todo $s \in \mathbb{R}$, que

$$\int_{y' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \dots + y_{n-1}\theta_{n-1} + s\theta) dy'$$

é integrável. Portanto $\int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx$ existe para quase todo $s \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a equação (2.1) é válida.

Para mostrar a independência da base ortonormal usada na definição 1.1.11, consideramos $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ e $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}\}$ bases ortonormais de θ^\perp . Seja $C_{(n-1) \times (n-1)}$ a matriz de mudança de base de A para B . Então, C é uma matriz ortogonal e $v = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_{n-1}\alpha_{n-1} + s\theta$ é um elemento do hiperplano $\langle \theta, x \rangle = s$. Por outro lado, temos que $v = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \dots + y_{n-1}\beta_{n-1} + s\theta$ onde

$$y' = Cx' \quad (2.2)$$

para $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$ e $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Aplicando o teorema de mudança de variáveis, em \mathbb{R}^{n-1} , na (2.2), segue que

$$\begin{aligned} \int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx &= \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_{n-1}\alpha_{n-1} + s\theta) dx' \\ &= |\det(C)| \int_{y' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \dots + y_{n-1}\beta_{n-1} + s\theta) dy'. \end{aligned}$$

Como C é uma matriz ortogonal, $|\det(C)| = 1$ e isso prova que a integral sobre hiperplanos independe da base ortonormal usada na definição. ■

Corolário 2.1.2.

$$\int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx = \int_{\langle -\theta, x \rangle = -s} f(x) dx.$$

Demonstração: Aplicando a definição de integração sobre hiperplanos (definição 1.1.11), temos para o hiperplano $\langle \theta, x \rangle = s$,

$$\int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx = \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \dots + x_{n-1}\theta_{n-1} + s\theta) dx' \quad (2.3)$$

e, para o hiperplano $\langle -\theta, x \rangle = -s$,

$$\int_{\langle -\theta, x \rangle = -s} f(x) dx = \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(-x_1\theta_1 - x_2\theta_2 + \dots - x_{n-1}\theta_{n-1} + s\theta) dx'. \quad (2.4)$$

Fazendo a simples observação de que as equações (2.3) e (2.4) diferem apenas por uma translação e utilizando o fato a integral ser invariante sob translações (corolário 1.1.9), concluímos a demonstração. ■

O próximo corolário nos diz que a Transformada de Radon de uma função integrável existe como um número finito para quase todos, se não todos, $s \in \mathbb{R}$.

Corolário 2.1.3. *Se f é uma função integrável em \mathbb{R}^n e se $\theta \in S^{n-1}$ é uma direção fixa, então $\mathcal{R}_\theta f(s)$ é definida para quase todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso*

$$\int_{s \in \mathbb{R}} \mathcal{R}_\theta f(s) ds = \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Além do mais, isso nos mostra que a Transformada de Radon de uma função integrável continua sendo integrável.

Corolário 2.1.4. *A integral definindo $\mathcal{R}f(\theta, s)$ é independente da escolha de base usada na definição da Transformada de Radon.*

A demonstração dos últimos dois corolários decorre diretamente do teorema de integração sobre hiperplanos.

Exemplo 2.1.5. *Neste exemplo apresentamos uma função $f \in \mathbb{R}^n$ que é finita quase sempre, e, mesmo assim, existe um hiperplano onde f não é integrável.*

Seja

$$f(x) = \begin{cases} (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)^{-\frac{n-1-\sqrt{|x_n|}}{2}} & \text{se } (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) \leq 1 \text{ e } 0 < |x_n| \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $\theta = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Note que pela definição de θ , o hiperplano $\langle \theta, x \rangle = s$ se torna apenas $x_n = s$ e podemos aplicar o teorema de integração sobre hiperplanos para obter

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx ds \\ &= \int_{-1}^1 \int_{|x'| \leq 1} (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)^{-\frac{n-1-\sqrt{|s|}}{2}} dx' ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A restrição da variável x' para a esfera unitária em \mathbb{R}^{n-1} é justificada pela definição da função f .

Note que esta integração está sendo feita sobre \mathbb{R}^{n-1} . Fazendo uma substituição para coordenadas polares, teremos

$$x' = r'\theta'$$

onde

$$r' = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$$

e $\theta' \in S^{n-2}$, que é a esfera unitária de \mathbb{R}^{n-1} . Além disso, quando fazemos a transformação para coordenadas polares, devemos usar $|S^{n-2}|$ e r'^{n-2} (devido a equação (1.17)). Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx &= |S^{n-2}| \int_0^1 r'^{-(n-1-\sqrt{|s|})} r'^{n-2} dr' \\ &= |S^{n-2}| \frac{1}{\sqrt{|s|}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

para $|s| \leq 1$. Agora, se $s = 0$ a última expressão é infinita, enquanto que se $0 < |s| \leq 1$, temos valores finitos. Por f ser 0 quando $|s|$ é muito grande, a integral sobre o hiperplano também é 0 e, portanto, finita. Além do mais, f é integrável em quase todos, mas não todos os hiperplanos. Contudo, f é integrável, pois aplicando a equação (2.6) na integral iterada (2.5) temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{-1}^1 |S^{n-2}| \frac{1}{\sqrt{|s|}} ds = 4|S^{n-2}| < \infty.$$

2.2 Propriedades da Transformada de Radon

Iniciaremos esta seção provando algumas propriedades interessantes da Transformada de Radon.

Corolário 2.2.1. *A Transformada de Radon é uma função par.*

$$\mathcal{R}f(-\theta, -s) = \mathcal{R}f(\theta, s)$$

Demonstração : Consequência direta da definição da Transformada de Radon 1.2.1 e do Corolário 2.1.2.

Nas propriedades que serão apresentadas na sequência, todas as funções são consideradas integráveis em \mathbb{R}^n .

Proposição 2.2.2 (Linearidade da Transformada de Radon). *Para quaisquer funções $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e quaisquer constantes $a, b \in \mathbb{R}$ temos*

$$\mathcal{R}(af + bg)(\theta, s) = a\mathcal{R}f(\theta, s) + b\mathcal{R}g(\theta, s).$$

Duas transformações Euclidianas importantes são as translações e as transformações lineares ortogonais. Vale lembrar que a translação de uma função f por um vetor a é a função na qual o valor em x é $f(x - a)$. Neste trabalho denotaremos a composição de uma função pela operação de translação por f_a .

Proposição 2.2.3. *A Transformada de Radon da translação da função f , pelo vetor a , é a translação da Transformada de Radon de f por $\langle \theta, a \rangle$. Em outras palavras,*

$$\mathcal{R}f_a(\theta, s) = \mathcal{R}f(\theta, s - \langle \theta, a \rangle).$$

Demonstração : Se $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n , então

$$\begin{aligned}\mathcal{R}f_a(\theta, s) &= \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f_a(x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \dots + x_{n-1}\theta_{n-1} + s\theta) dx' \\ &= \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \dots + x_{n-1}\theta_{n-1} + s\theta - a) dx'.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Pela ortonormalidade da base, podemos expandir o vetor a da seguinte forma: defina $b_k = \langle a, \theta_k \rangle$, para $k = 1, \dots, n-1$. Então,

$$a = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \theta_k + \langle a, \theta \rangle \theta$$

Logo, podemos reescrever a equação (2.7) como

$$\mathcal{R}f_a(\theta, s) = \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f((x_1 - b_1)\theta_1 + \dots + (x_{n-1} - b_{n-1})\theta_{n-1} + (s - \langle a, \theta \rangle)\theta) dx'$$

Como a translação é invariante sobre integrais em espaços Euclidianos, \mathbb{R}^{n-1} neste caso, podemos tratar $(x_j - b_j)$ como variáveis. Portanto, a última expressão de f sobre o hiperplano $\langle x, \theta \rangle = s - \langle a, \theta \rangle$. Isso é o mesmo que $\mathcal{R}f(\theta, s - \langle a, \theta \rangle)$ e a demonstração está completa. ■

A relação da Transformada de Radon com transformações ortogonais em \mathbb{R}^n é apresentada logo abaixo.

Proposição 2.2.4 (Teorema da Rotação). *Seja T uma transformação ortogonal de \mathbb{R}^n . Então*

$$\mathcal{R}(f \circ T)(\theta, s) = \mathcal{R}f(T(\theta), s)$$

Demonstração : Se $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta\}$ é uma base ortonormal do \mathbb{R}^n , então

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(f \circ T)(\theta, s) &= \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} (f \circ T)(x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \dots + x_{n-1}\theta_{n-1} + s\theta) dx' \\ &= \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x_1T(\theta_1) + x_2T(\theta_2) + \dots + x_{n-1}T(\theta_{n-1}) + sT(\theta)) dx'.\end{aligned}$$

Note que usamos a linearidade de T para expandir a combinação linear nesta equação. Mas, a ortogonalidade da transformação T implica que $\{T(\theta_1), T(\theta_2), \dots, T(\theta_{n-1}), T(\theta)\}$ é uma base ortonormal do \mathbb{R}^n . Então, pela definição de integral sobre hiperplanos, a última expressão é, precisamente, $\int_{\langle T(\theta), x \rangle = s} f(x) dx = \mathcal{R}f(T(\theta), s)$. ■

O Teorema da Rotação (proposição 2.2.4) pode ser generalizado para qualquer transformação linear não-singular, mas para isto precisamos de algumas definições. Primeiro, lembremos do teorema fundamental do calculo: se φ é uma função contínua em \mathbb{R} e a é um número real qualquer, então

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(t) dt = \varphi(x).$$

Escrevendo o lado esquerdo da equação acima em forma de limites, obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} \varphi(t) dt - \int_a^x \varphi(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} \varphi(t) dt}{h}.$$

Reescrevendo, ficamos com

$$\varphi(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varphi(t) dt$$

para qualquer função contínua φ . Um resultado fundamental na teoria de Lebesgue é que essa equação é verdadeira quase sempre para funções integráveis. Mais precisamente,

Lema 2.2.5 (Teorema da diferenciação de Lebesgue). *Se φ é uma função integrável em \mathbb{R} , então*

$$\varphi(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varphi(t) dt$$

quase sempre.

Demonstração : A demonstração pode ser encontrada em [13], corolário I.1.

Agora, vamos definir uma transformação auxiliar à Transformada de Radon.

Definição 2.2.6. *Se f é integrável em \mathbb{R}^n , defina*

$$Mf(\theta, s) = \int_{\langle \theta, x \rangle \leq s} f(x) dx.$$

Lema 2.2.7. *Sejam $\theta \in S^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$ e f integrável em \mathbb{R}^n . Então*

$$\frac{\partial}{\partial s} Mf(\theta, s) = \mathcal{R}f(\theta, s).$$

Demonstração : Como θ é um vetor unitário é fácil ver que uma mudança de variáveis ortogonal irá nos levar para o caso onde θ é o vetor unitário padrão $(0, \dots, 0, 1)$. Neste caso, $\langle \theta, x \rangle = x_n$ e, o domínio de integração para $Mf(\theta, s)$ é $\{x_n \leq s\}$. A integral que define $Mf(\theta, s)$ pode ser calculada pelo teorema de Fubini como segue. Primeiro, defina

$$\varphi(x_n) = \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x', x_n) dx'.$$

Então, φ representa a integral de dentro na aplicação do teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} Mf(\theta, s) &= \int_{x_n \leq s} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^s \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x', x_n) dx' dx_n \\ &= \int_{-\infty}^s \varphi(x_n) dx_n. \end{aligned}$$

Além do mais, o teorema de Fubini garante que φ é integrável na reta real. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Mf(\theta, s+h) - Mf(\theta, s)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{s+h} \varphi(x_n) dx_n - \int_{-\infty}^s \varphi(x_n) dx_n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} \varphi(x_n) dx_n \\ &= \varphi(s) \end{aligned}$$

quase sempre, sendo o último passo justificado pela integrabilidade de φ e pelo teorema da diferenciação de Lebesgue. Isso garante a existência da derivada parcial e da equação

$$\frac{\partial}{\partial s} Mf(\theta, s) = \varphi(s).$$

A demonstração é concluída pela observação que $\varphi(s) = \int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx = \mathcal{R}f(\theta, s)$. De fato, pelo corolário 1.1.10,

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(x', s) dx' = \int_{y' \in \mathbb{R}^{n-1}} f(y_1 \theta_1, y_2 \theta_2, \dots, y_{n-1} \theta_{n-1}, s \theta_n) dy' \\ &= \int_{\langle \theta, y \rangle = s} f(y) dy = \mathcal{R}(\theta, s), \end{aligned}$$

sendo as últimas duas igualdades validadas pelas definições de integração sobre hiperplanos 1.1.11 e Transformada de Radon 1.2.1. ■

Agora podemos provar o resultado sobre transformações lineares.

Proposição 2.2.8 (Teorema das Transformações Lineares). *Seja T uma transformação linear não-singular do \mathbb{R}^n , com adjunta denotada por T^* . Então*

$$\mathcal{R}(f \circ T)(\theta, s) = \frac{1}{|\det T|} \frac{1}{|(T^*)^{-1}(\theta)|} \mathcal{R}f \left(\frac{(T^*)^{-1}(\theta)}{|(T^*)^{-1}(\theta)|}, \frac{s}{|(T^*)^{-1}(\theta)|} \right).$$

Demonstração : Lembremos que a propriedade que define a adjunta é: para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle.$$

Seja D_s o conjunto de todos os pontos x em \mathbb{R}^n que satisfazem a inequação $\langle \theta, x \rangle \leq s$. Ainda, seja E_s o conjunto de todos os pontos y em \mathbb{R}^n que satisfazem a inequação $\langle (T^*)^{-1}(\theta), y \rangle \leq s$. Sendo assim, podemos provar que a imagem de D_s sob a transformação T satisfaz a equação

$$T(D_s) = E_s. \quad (2.8)$$

De fato, a equação (2.8) é equivalente a $D_s = T^{-1}(E_s)$, pois T é não-singular. Mas $x \in D_s$ se, e somente se, $\langle \theta, x \rangle \leq s$, que ocorre se, e somente se, $\langle \theta, T^{-1}Tx \rangle = \langle (T^{-1})^*\theta, Tx \rangle \leq s$. Pela definição de E_s , esta última inequação será verdadeira se, e somente se, $Tx \in E_s$. Isso é equivalente para $x \in T^{-1}(E_s)$ e isso estabelece a equação (2.8).

Agora, aplicando o teorema de mudança de variáveis com a substituição definida por T :

$$\begin{aligned} \int_{T(D_s)} f(y)dy &= \int_{D_s} f(T(x))JT(x)dx \\ &= |\det T| \int_{D_s} (f \circ T)(x)dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde $JT(x) = |\det T|$.

Note que $(T^*)^{-1}(\theta)$ não é necessariamente um vetor unitário. Isso não é um problema, pois o conjunto $T(D_s)$ é igual ao conjunto E_s e é fácil observar que E_s é idêntico ao conjunto de pontos $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\left\langle \frac{(T^*)^{-1}(\theta)}{|(T^*)^{-1}(\theta)|}, y \right\rangle \leq \frac{s}{|(T^*)^{-1}(\theta)|}.$$

Aqui, podemos observar que $\frac{(T^*)^{-1}(\theta)}{|(T^*)^{-1}(\theta)|}$ é um vetor unitário. Portanto, pela equação (2.9),

$$\int_{\left\langle \frac{(T^*)^{-1}(\theta)}{|(T^*)^{-1}(\theta)|}, y \right\rangle \leq \frac{s}{|(T^*)^{-1}(\theta)|}} f(y)dy = |\det T| \int_{\langle \theta, x \rangle \leq s} (f \circ T)(x)dx.$$

Isso pode ser reescrito em termos do operador M ,

$$Mf \left(\left\langle \frac{(T^*)^{-1}(\theta)}{|(T^*)^{-1}(\theta)|}, \frac{s}{|(T^*)^{-1}(\theta)|} \right\rangle \right) = |\det T| M(f \circ T)(\theta, s).$$

Diferenciando os dois lados desta equação com relação a variável s e usando o lema 2.2.7, obtemos

$$\frac{1}{|(T^*)^{-1}(\theta)|} \mathcal{R}f \left(\left\langle \frac{(T^*)^{-1}(\theta)}{|(T^*)^{-1}(\theta)|}, \frac{s}{|(T^*)^{-1}(\theta)|} \right\rangle \right) = |\det T| \mathcal{R}(f \circ T)(\theta, s),$$

o que conclui a demonstração. \blacksquare

Chamamos de dilatação de uma função $f(x)$ a função da forma $f(\gamma x)$, onde γ é um número real diferente de zero. Assim, definimos o operador δ_γ por $\delta_\gamma f(x) = f(\gamma x)$ e chamamos δ_γ de operador de dilatação com fator γ .

Proposição 2.2.9. *Seja $\theta \in S^{n-1}$, $s \in \mathbb{R}$ e f uma função integrável em \mathbb{R}^n . Então, se $\gamma \neq 0$, temos*

$$\mathcal{R}(\delta_\gamma f)(\theta, s) = \gamma^{1-n} \mathcal{R}f(\theta, \gamma s).$$

Ideia da Demonstração: Se $\gamma > 0$, isso é uma simples consequência do último teorema com $T(x) = \gamma x$. Neste caso, a matriz de T é γI (onde I representa a matriz identidade) e $T = \gamma^n, T = T^*$ e $T^{-1} = \frac{1}{\gamma} T$. Caso $\gamma < 0$, podemos usar o $\gamma = \text{sign}(\gamma)|\gamma|$ (sign é a função sinal) para obter o mesmo resultado. ■

Definição 2.2.10 (Convolução). *Se f e g são funções integráveis em \mathbb{R}^n , então definimos a convolução $f * g$ de f e g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy.$$

Se F e G são funções integráveis no cilindro $S^{n-1} \times \mathbb{R}$, definimos sua convolução por

$$(F * G)(\theta, s) = \int_{t \in \mathbb{R}} F(\theta, s - t)g(t)dt.$$

Observe que a integração é feita apenas em relação a segunda variável.

Para quais funções podemos aplicar a convolução com sucesso? Usando o teorema de Fubini e o teorema de mudança de variáveis, podemos mostrar que a convolução de funções integráveis também é integrável. Para isso, sejam f e g funções integráveis em \mathbb{R}^n e defina $h = f * g$, de acordo com a definição 2.2.10. Agora usamos o teorema de Fubini em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ da seguinte forma: sejam x' e x'' elementos do \mathbb{R}^n , então (x', x'') é um elemento de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Assim, podemos reescrever a definição 2.2.10 na forma

$$h(x') = \int_{x'' \in \mathbb{R}^n} f(x' - x'')g(x'')dx''.$$

Seja

$$K = \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|du.$$

Como f é integrável, K é um número real finito. Assim, note que na x'' é constante seguinte integração, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x' - x'')g(x'')|dx' &= |g(x'')| \int_{\mathbb{R}^n} f(x' - x'')dx' \\ &= |g(x'')| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x')|dx' = K|g(x'')|.\end{aligned}$$

Aqui usamos o fato da integral ser invariante sob translações (corolário 1.1.9) para tirar o termo x'' da integral. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x' - x'')g(x'')|dx' \right) dx'' &= \int_{\mathbb{R}^n} K|g(x'')|dx'' \\ &= K \int_{\mathbb{R}^n} |g(x'')|dx'' < \infty\end{aligned}$$

pela hipótese de que g é integrável. Portanto, a função $x'' \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f(x' - x'')g(x'')|dx'$ é integrável para todo $x' \in \mathbb{R}^n$. Como uma função é integrável se, e somente se, seu módulo for integrável, temos que $x'' \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x' - x'')g(x'')dx'$ é integrável. Então, pela segunda parte do teorema de Fubini, a função $(x', x'') \mapsto f(x' - x'')g(x'')$ também é integrável em \mathbb{R}^{2n} . Agora, pela primeira parte do mesmo teorema, a função que leva x' em $\int_{\mathbb{R}^n} f(x' - x'')g(x'')dx'$ é integrável e esta é, precisamente, a função $h = f * g$. Portanto, provamos que a convolução de funções integráveis é integrável. ■

Sabendo disso, vamos analisar o efeito da convolução sobre a Transformada de Radon.

Proposição 2.2.11 (Teorema da Convolução para a Transformada de Radon). *Se f e g são funções integráveis em \mathbb{R}^n , então $f * g$ também é integrável e*

$$\mathcal{R}(f * g)(\theta, s) = \mathcal{R}f(\theta, s) * \mathcal{R}g(\theta, s).$$

Demonstração : Antes de começar a demonstração, vale lembrar que sempre que aparecer uma variável da forma $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $u' = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Seja $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta\}$ uma base ortonormal do \mathbb{R}^n contendo θ . Então, usamos a definição da Transformada de Radon e da convolução para obter

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(f * g)(\theta, s) &= \int_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} (f * g)(x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \dots + x_{n-1}\theta_{n-1} + s\theta)dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \dots + x_{n-1}\theta_{n-1} + s\theta - w)g(w)dw dx',\end{aligned}$$

Fazendo a seguinte mudança de variável ortogonal

$$w = y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \dots + y_{n-1}\theta_{n-1} + t\theta,$$

na qual o diferencial $dw = dy'dt$. Note que isso é possível pelo corolário 1.1.10, pois o integrando na integral de dentro é Lebesgue integrável para quase todo w . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f * g)(\theta, s) & \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f((x_1 - y_1)\theta_1 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})\theta_{n-1} + (s - t)\theta) \\ &\quad \times g(y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \dots + y_{n-1}\theta_{n-1} + t\theta) dy' dt dx'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

O integrando na integral mais de dentro é uma translação invariante. Então, podemos substituir $x_j - y_j$ por x_j . Além do mais, como o integrando na equação (2.10) é integrável, podemos usar o teorema de Fubini para trocar a ordem de integração. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(f * g)(\theta, s) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1\theta_1 + \dots + x_{n-1}\theta_{n-1} + (s - t)\theta) dx' \\ &\quad \times g(y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \dots + y_{n-1}\theta_{n-1} + t\theta) dy' dt. \end{aligned}$$

A integral mais de dentro é

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1\theta_1 + \dots + x_{n-1}\theta_{n-1} + (s - t)\theta) dx'$$

e isso é exatamente $\mathcal{R}f(\theta, s - t)$, que é independente de qualquer y e, por sua vez, do diferencial dy' . Por isso, a equação anterior se torna

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(y_1\theta_1 + y_2\theta_2 + \dots + y_{n-1}\theta_{n-1} + t\theta) dy' \right] \mathcal{R}f(\theta, s - t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}g(\theta, t) \mathcal{R}f(\theta, s - t) dt \\ &= \mathcal{R}f(\theta, s) * \mathcal{R}g(\theta, s) \\ &= \mathcal{R}(f * g)(\theta, s) \end{aligned}$$

visto que a expressão entre colchetes é $\mathcal{R}g(\theta, t)$. ■

2.3 Injetividade da Transformada de Radon

Nesta seção responderemos a segunda das perguntas formuladas no Capítulo anterior. Isto é, daremos garantias de injetividade da Transformada de Radon. Esta propriedade exige a exploração de uma conexão importante existente entre a Transformada de Radon e a Transformada de Fourier.

Definição 2.3.1. Se f é uma função integrável em \mathbb{R}^n , então definimos

$$(\mathcal{F}f)(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp^{-i\langle x, y \rangle} dx.$$

A função $\mathcal{F}f$ é chamada de Transformada de Fourier de f e é comum usar a notação \widehat{f} .

Observação 2.1. O valor absoluto do integrando na definição da Transformada de Fourier é $|f(x)|$, visto que $|\exp^{-i\langle x, y \rangle}| = 1$. Como sabemos que f é integrável, isso mostra que a Transformada de Fourier de uma função integrável existe para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Precisamos de apenas uma propriedade da Transformada de Fourier, sua injetividade: se $\mathcal{F}f = 0$, então $f = 0$ quase sempre. Para mais detalhes e propriedades da Transformada de Fourier, consultar [14].

Note que a Transformada de Fourier pode ser definida em qualquer espaço euclidiano. Sendo assim, quando for necessário enfatizar a dimensão em que a Transformada Fourier está sendo aplicada, utilizaremos a notação \mathcal{F}_n .

A relação entre a Transformada de Radon e a Transformada de Fourier é, as vezes, chamada de teorema da fatia de Fourier ou projeção de fatia.

Teorema 2.3.2 (Projeção de Fatia). Se f é integrável em \mathbb{R}^n e se θ é um vetor unitário, então

$$\mathcal{F}_1 \mathcal{R}_\theta f(s) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_n f(s\theta). \quad (2.11)$$

Demonstração : Pela definição da Transformada de Fourier, a integração sobre \mathbb{R}^n pode ser realizada sobre qualquer conjunto de hiperplanos paralelos. Em particular, isso pode ser feito sobre o conjunto dos hiperplanos ortogonais à θ . Isso é uma consequência do teorema de Fubini e o resultado é

$$\mathcal{F}_n f(s\theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\langle \theta, x \rangle = p} f(x) \exp^{-i\langle x, s\theta \rangle} dx \right] dp. \quad (2.12)$$

Mas se x está no hiperplano $\langle \theta, x \rangle = p$, então $\langle x, s\theta \rangle = s\langle x, \theta \rangle = sp$. Assim, o termo exponencial é constante na integral de dentro, então

$$\mathcal{F}_n f(s\theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\langle \theta, x \rangle = p} f(x) dx \right] \exp^{-isp} dp.$$

Podemos observar que a integral entre colchetes é a Transformada de Radon, portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n f(s\theta) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_\theta f(p) \exp^{-isp} dp \\ &= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \mathcal{F}_1 \mathcal{R}_\theta f(s).\end{aligned}$$

A constante $(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}$ aparece pelo fato da Transformada de Fourier em uma dimensão precisar do fator $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ de $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}$. ■

Usando as propriedades da Transformada de Fourier mostradas acima, podemos introduzir um importante resultado:

Teorema 2.3.3 (Injetividade da Transformada de Radon). *Uma função integrável é unicamente determinada pela sua Transformada de Radon: se f e g são funções integráveis em \mathbb{R}^n com*

$$\mathcal{R}f(\theta, s) = \mathcal{R}g(\theta, s) \tag{2.13}$$

para todos os vetores unitários θ e para todo $s \in \mathbb{R}$, então

$$f(x) = g(x)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração : Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Pela linearidade da Transformada de Radon e da hipótese (2.13), vemos que

$$\mathcal{R}_\theta h = 0$$

para qualquer vetor unitário θ , donde é imediato que a Transformada de Fourier de $\mathcal{R}_\theta h$ também é zero para qualquer θ . Pelo teorema da Projeção de Fatia vemos que para todo $\theta \in S^{n-1}$ e todo $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\mathcal{F}_n h(s\theta) = 0.$$

Mas qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ é da forma $s\theta$ (isto é, se $x \neq 0$, então basta escolher $s = |x|$ e $\theta = \frac{x}{|x|}$), o que resulta que $\mathcal{F}_n h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Disso e da propriedade injetiva da Transformada de Fourier, segue que $h(x) = 0$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. A conclusão do teorema é decorrente da forma como definimos h . ■

2.4 Existência de uma Fórmula de Inversão

O Teorema 2.3.2 garante a existência de uma inversa (pelo menos lateral) para a Transformada de Radon. Além do mais, a Transformada de Radon é sobrejetora e, portanto, bijetora. Com isso podemos procurar por uma inversa da Transformada de Radon [6]. No entanto, foge ao escopo deste trabalho a demonstração da sobrejetividade da Transformada de Radon, bem como um estudo aprofundado sobre as fórmulas de inversão da Transformada de Radon. Para detalhes, veja [6]. Neste trabalho nos restringiremos a enunciar as fórmulas de inversão mais importantes para a Transformada de Radon.

Teorema 2.4.1. *Seja $n > 1$ ímpar. Então*

$$f(x) = 2^{-n}(i\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \mathcal{R}f(x, \langle \theta, x \rangle) dS$$

Antes de enunciar a fórmula para $n > 1$ par, precisamos definir a Transformada de Hilbert:

Definição 2.4.2 (Transformada de Hilbert). *Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\mathcal{H}f(s) = \mathcal{F}^{-1}(-i \cdot \text{sign}(\lambda) \mathcal{F}(\lambda))$$

Teorema 2.4.3. *Seja $n > 1$ par. Então*

$$f(x) = 2^{-n}(i\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \mathcal{H}\mathcal{R}f \right) (x, \langle \theta, x \rangle) dS$$

As demonstrações dos teoremas 2.4.1 e 2.4.3 podem ser encontradas em [1, 11].

2.5 Relação entre a Fórmula de Inversão e Problemas Mal-Postos

Nesta seção vamos explorar a relação que existe entre a Fórmula de Inversão para a Transformada de Radon e Problemas Mal-Postos.

Um problema é dito bem posto no sentido de Hadamard se este problema possui uma solução, esta solução é única e, além disso, esta depende continuamente dos dados. Um problema é dito ser mal posto se algum destes requisitos não é satisfeito.

Já provamos que a Transformada de Radon é injetiva e sobrejetiva. Portanto os requisitos de existência e unicidade são satisfeitos. O problema está com o axioma de

dependência contínua. Lembremos, antes de mais nada, que os dados aos quais temos acesso num processo de tomografia são obtidos pela Transformada de Radon.

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.5.1 (Diferenciação nos dados). *Sejam, $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $y^\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas com y^δ contaminada por ruídos de forma que*

$$\|y(t) - y^\delta(t)\|_\infty \leq \delta, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Gostaríamos de reconstruir a derivada $x = y'$ de y . Uma das estratégias (pelo menos do ponto de vista numérico) é considerar aproximações por diferenças simétricas, i.e., para qualquer $\tau \in (0, 1)$ tomar

$$x^{\delta,h}(\tau) := \frac{y^\delta(\tau + h) - y^\delta(\tau - h)}{2h}.$$

Um simples argumento com a desigualdade triangular fornece

$$\begin{aligned} \|x^{\delta,h}(\tau) - x(\tau)\|_\infty &\leq \left\| \frac{y(\tau + h) - y(\tau - h)}{2h} - x(\tau) \right\|_\infty \\ &\quad + \left\| \frac{(y^\delta - y)(\tau + h) - (y^\delta - y)(\tau - h)}{2h} \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Suponha que tenhamos o limitante

$$\|x'(t)\|_\infty \leq E, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Substituindo o limitante na desigualdade acima, obtemos a estimativa de erro

$$\|x^{\delta,h}(\tau) - x(\tau)\|_\infty \leq hE + \frac{\delta}{h}. \quad (2.14)$$

A equação (2.14) é típica em problemas inversos. O que é importante, por agora, é entender o que a equação (2.14) quer nos dizer. Temos dois termos nessa estimativa de erro: um devido a aproximação da aplicação inversa e o outro devido ao erro de medida. Observe que, quanto mais refinarmos a aproximação (quanto mais próximo de zero tomarmos h) mais precisamente estamos calculando a derivada y' . Por outro lado, como os dados estão corrompidos por erros, (2.14) nos ensina que, se h for tomado muito pequeno, então $x^{\delta,h}$ pode estar longe da solução verdadeira.

O melhor que podemos fazer é escolher h de forma a balancear o lado direito de (2.14). Ou seja, tomar

$$h(\delta) := E^{-\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}}.$$

Note que em ambas as fórmulas de inversão obtidas na seção anterior temos diferenciação nos dados. Assim, o problema inverso associado a Transformada de Radon é mal-posto.

3 Modelo Discreto

Neste capítulo será feita uma discretização da equação (1.19). Além disso, serão apresentados três métodos que visam solucionar o problema da tomografia computadorizada, sendo eles: Técnica de Reconstrução Algébrica (ART - Algebraic Reconstruction Technique), Retroprojeção Filtrada (FBP - Filtered Backprojection) e Decomposição em Valores Singulares (SVD - Singular Value Decomposition).

3.1 Modelo Discretizado

Nesta seção apresentamos a relação entre a Transformada de Radon derivada no capítulo 1 e uma versão discretizada do problema.

Como motivação, considere a figura 3.1. A imagem tomográfica que deve ser reconstruída consiste de um vetor com variáveis desconhecidas, f_j , com $j = 1, \dots, N$, ou seja, os coeficientes de absorção.

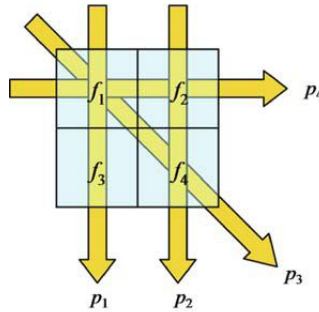


Figura 3.1: Exemplo de construção de sistema para uma imagem com 4 pixels.

Por exemplo, o processo mostrado na figura 4.4 gera um sistema de equações lineares da forma

$$\begin{aligned}
 f_1 + f_3 &= p_1 \\
 f_2 + f_4 &= p_2 \\
 f_1 + f_4 &= p_3 \\
 f_1 + f_2 &= p_4
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

No sistema acima, são obtidas quatro equações com quatro incógnitas. Esse sistema pode ser resolvido com exatidão, desde que o método de mensuração física não sofra com ruídos e não ocorra dependência linear.

Fisicamente, cada feixe de raio X possui uma espessura. Quando o feixe de raio X passa pela região Ω , temos que levar em conta quanto do pixel a ser reconstruído é afetado pelo feixe. Para este propósito, são introduzidos pesos que refletem a relação entre a área iluminada pelo feixe de raio X com relação a área total do pixel [6]. Estes pesos são calculados de acordo com a figura 3.2.

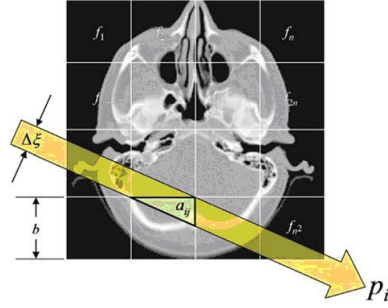


Figura 3.2: Processo de construção dos coeficientes a_{ij} .

O valor de a_{ij} é determinado pela seguinte relação

$$a_{ij} = \frac{\text{área iluminada do pixel } j \text{ pelo raio } i}{\text{área total do pixel } j} \quad (3.2)$$

Generalizando o sistema (3.1), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} f_j = p_i \quad i = 1, \dots, M \quad (3.3)$$

Notando por A a matriz contendo os a_{ij} , f o vetor com os coeficientes de atenuação f_j e por p o vetor de medidas das intensidades de raio-X p_i , pode-se reescrever a (3.3) em forma matricial:

$$Af = p \quad (3.4)$$

Fazendo uma analogia com a equação (1.2.1),

$$\begin{array}{ccc} A & f & = & p \\ \updownarrow & \updownarrow & = & \updownarrow \\ \mathcal{R} & f(\theta, s) & = & \int_{\langle \theta, x \rangle = s} f(x) dx \end{array}$$

Uma análise preliminar da equação (3.4) diria que a solução é $f = A^{-1}p$. Porém, a inversão direta da matriz A , quando possível, não é bem vinda devido aos seguintes fatores

- Tipicamente, o sistema (3.4) possui uma matriz A singular, ou então, não quadrada ($N \neq M$);
- Ainda, em aplicações reais, a matriz A - por ser muito grande - ocasiona uma intensa demanda computacional em processos diretos de inversão;
- Valores singulares muito próximos de zero, implicando em mal-condicionamento do problema [10].

3.2 Técnica de Reconstrução Algébrica (ART)

Para tentar contornar o problema com inversões de matrizes, o ART busca a solução pela projeção sequencial a partir de uma estimativa inicial, no conjunto de soluções das equações lineares, onde cada um desses conjuntos é um hiperplano. Pode-se ter uma ideia de como esta projeção sequencial funciona, veja a figura 3.3.

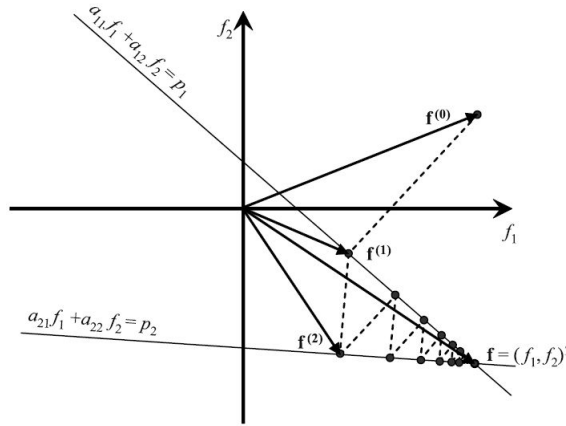


Figura 3.3: Solução iterativa para um sistema de duas equações. A solução do espaço bidimensional para cada equação é uma reta. O ponto de intersecção das duas retas nos resulta o vetor solução $f = (f_1, f_2)^T$, i.e., os pixels da imagem desejada.

Começando com uma imagem inicial $f^{(0)}$, a sequência de imagens, $\{f^{(1)}, f^{(2)}, \dots\}$, é calcula iterativamente até que convirja para a reconstrução tomográfica desejada.

No primeiro passo,

$$p^{(n)} = Af^{(n)} \quad (3.5)$$

é determinada a n -ésima imagem aproximada $f^{(n)}$. A projeção, $p^{(n)}$, determinada nesta n -ésima projeção sequencial pode ser comparada com a medida atual da projeção, p . A comparação entre a projeção determinada e medida resulta em termos de correções que são aplicados na n -ésima imagem aproximada, $f^{(n)}$, resultando na $(n+1)$ -ésima imagem aproximada. Esse processo é repetido iterativamente de tal modo que uma outra projeção sequencial, a projeção $p^{(n+1)}$ é determinada.

E, por fim, é feita uma correção de estimativa de acordo com a seguinte equação

$$f^{(n)} = f^{(n-1)} - \frac{(a_i f^{(n-1)} - p_i)(a_i)^T}{a_i(a_i)^T} \quad (3.6)$$

onde i é escolhido de forma aleatória.

3.2.1 Convergência do ART

A ideia para resolver o sistema $Af = p$ é particionar o sistema em linha ou coluna. Por questão de definição, vamos considerar a versão por linhas, escrevendo

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times N}, a_j \in \mathbb{R}^N \quad (3.7)$$

onde $a_j^T \neq 0$ é a j -ésima linha da matriz A , a equação $Af = p$ pode ser vista como um sistema de equações

$$A_j f = a_j^T f = p_j, 1 \leq j \leq M,$$

onde $A_j : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Cada uma destas equações indeterminadas definem um hiperplano (1.1.1) de dimensão $N - 1$. A ideia do ART é projetar a solução atual aproximada sucessivamente em cada um desses hiperplanos. Este processo converge para a solução do sistema, desde que esta exista.

De uma forma mais geral, podemos escrever:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times N}, A_j \in \mathbb{R}^{k_j \times N} \quad (3.8)$$

onde $k_1 + \dots + k_l = M$. Nesta decomposição em blocos de A , devemos exigir que cada bloco A_j tenha posto-linha completo e defina uma aplicação sobrejetora.

Generalizando, sejam H e H_j , $1 \leq j \leq M$, espaços de Hilbert. Consideramos agora o sistema

$$A_j f = p_j, 1 \leq j \leq M$$

onde os operadores

$$A_j : H \rightarrow H_j, 1 \leq j \leq M$$

são lineares e limitados e $p_j \in \text{Im}(A_j)$. Seja

$$X_j = \{x \in H \mid A_j x = p_j\}, \quad (3.9)$$

e denote por $P_j : H \rightarrow X_j$ as projeções ortogonais nestes subespaços afins. Além disso, definimos a projeção sequencial por

$$P = P_M P_{M-1} \dots P_2 P_1 \quad (3.10)$$

O seguinte teorema ajuda a entender o comportamento do ART.

Teorema 3.2.1 (Convergência do ART). *Assuma que existe pelo menos uma solução válida para o sistema de equações $A_j f = p_j$, $1 \leq j \leq M$. Então, o algoritmo ART converge para a solução de norma mínima da equação $Af = p$, isto é,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f, f \perp \mathcal{N}(A)$$

Demonstração : Como esboço da demonstração, vamos denotar por \mathfrak{Q} a projeção ortogonal

$$\mathfrak{Q} : H \rightarrow \bigcap_{j=1}^M \mathcal{N}(A_j) = \mathcal{N}(A),$$

e seja $z \in X$ arbitrário. Devemos mostrar que

$$f_k \rightarrow f = z - \mathfrak{Q}z, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

É claro que este limite satisfaz

$$A_j f = A_j z - A_j \mathfrak{Q} = p_j, 1 \leq j \leq M,$$

e, além disso, x é, por definição, perpendicular ao $\mathcal{N}(A)$.

Para relacionar as projeções parciais P_j com \mathfrak{Q} , vamos denotar por Q_j a projeção ortogonal

$$Q_j : H \rightarrow \mathcal{N}(A), 1 \leq j \leq M,$$

e seja Q a projeção sequencial

$$Q = Q_M Q_{M-1} \dots Q_2 Q_1 \quad (3.11)$$

Para qualquer $z \in X$, temos

$$P_j f = z + Q_j(f - z).$$

De fato

$$A_j P_j f = A_j z + A_j Q_j(f - z) = p_j,$$

e para qualquer $z_1, z_2 \in X_j$, a diferença $\delta z = z_1 - z_2$ está no $\mathcal{N}(A)$.

Portanto,

$$\langle f - (z + Q_j(f - z)), \delta z \rangle = \langle \overbrace{(1 - Q_j)}^{\perp \mathcal{N}(A)} \overbrace{(f - z)}^{\in \mathcal{N}(A)}, \delta f \rangle = 0$$

Agora podemos escrever a projeção sequencial P em termos de Q como segue.

Para $z \in X$, e $f \in H$, temos

$$P_2(P_1 f) = z + Q_2(\overbrace{(P_1 f)}^{=z+Q_1(f-z)} - z) = z + Q_2 Q_1(f - z),$$

e, por indução,

$$P f = z + Q(f - z).$$

De forma similar,

$$P^2 f = z + Q(P f - z) = z + Q^2(f - z),$$

e, por indução mais uma vez,

$$P^k f = z + Q^k(f - z),$$

isto é, pela definição do ART, temos

$$x_k = z - Q^k z.$$

Logo, é suficiente mostrar que para qualquer $z \in H$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q^k z = \Omega z. \quad (3.12)$$

Esse resultado é consequência de três lemas que serão apresentados a seguir.

Lema 3.2.2. *Seja $(f_k) \subset H$ ser uma sequência satisfazendo*

$$\|f_k\| \leq 1, \lim_{k \rightarrow \infty} \|Q f_k\| = 1,$$

onde Q é dado por (3.11). Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - Q)f_k = 0$$

Demonstração : A demonstração é feita por indução no número de membros da projeção Q_j . Para Q_1 , a prova é imediata pois, por ortogonalidade

$$\|(1 - Q_1)f_k\|^2 = \|f_k\|^2 - \|Q_1 f_k\|^2 \leq 1 - \|Q_1 f_k\|^2 \rightarrow 0,$$

a medida que k cresce.

Agora, supomos que a tese continua válida para $Q_j \dots Q_1$. Temos

$$\|Q_{j+1} Q_j \dots Q_1 f_k\| \leq \|Q_j \dots Q_1 f_k\| \leq 1,$$

então $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_{j+1} Q_j \dots Q_1 f_k\| = 1$ implica em $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_j \dots Q_1 f_k\| = 1$, e a hipótese de indução implica que

$$(1 - Q_j \dots Q_1)x_k \rightarrow 0$$

Escrevemos

$$(1 - Q_{j+1} Q_j \dots Q_1)f_k = (1 - Q_j \dots Q_1)f_k + (1 - Q_{j+1})Q_j \dots Q_1 f_k.$$

Aqui, o primeiro termo da direita tende a zero como vimos antes. Analogamente, denotando por $z_k = Q_j \dots Q_1 f_k$, continua válido que

$$\|z_k\| = \|Q_j \dots Q_1 f_k\| \leq 1$$

e

$$\|Q_{j+1} z_k\| = \|Q_{j+1} Q_j \dots Q_1 f_k\| \rightarrow 1,$$

mostra que o segundo termo também tende para zero. ■

Lema 3.2.3. *Temos*

$$\mathcal{N}(1 - Q) = \mathcal{N}(1 - \mathfrak{Q}) = \bigcap_{j=1}^M \mathcal{N}(A_j).$$

Demonstração : Seja $f \in \mathcal{N}(1 - \mathfrak{Q})$. Então $f \in \mathcal{N}(A_j)$ para todo j e, então, $f = Q_j f$, implicando em $f = Q_M \dots Q_1 f = Q f$, isto é, $x \in \mathcal{N}(1 - Q)$. Para provar a outra inclusão, $\mathcal{N}(1 - Q) \subset \mathcal{N}(1 - \mathfrak{Q})$, assumamos que $f = Q f$. Temos

$$\|f\| = \|Q_M \dots Q_2 Q_1 f\| \leq \|Q_1 f\| \leq \|f\|,$$

isto é, $\|Q_1 f\| = \|f\|$. Pela ortogonalidade,

$$\|(1 - Q_1)f\|^2 = \|f\|^2 - \|Q_1 f\|^2 = 0,$$

isto é, $f = Q_1 f$. Consequentemente, $f = Q_M \dots Q_2 f$. Indutivamente, mostramos que $f = Q_j f$ para todo j , isto é, $f \in \bigcap_{j=1}^M \mathcal{N}(A_j) = \mathcal{N}(\mathfrak{Q})$. ■

Antes de enunciar o próximo lema, precisamos de uma proposição.

Proposição 3.2.4. *Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert de dimensão finita ou infinita, dotados do produto interno $\langle x, y \rangle$, $x, y \in H_j, j = 1, 2$ e $A : H_1 \rightarrow H_2$ um operador compacto. E seja A^* o operador adjunto de A . Então os espaços H_1 e H_2 permitem a seguinte decomposição ortogonal*

$$H_1 = \mathcal{N}(A) \oplus (\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\text{Im}(A^*)}, H_2 = \mathcal{N}(A) \oplus (\mathcal{N}(A))^\perp = \overline{\text{Im}(A)} \oplus \mathcal{N}(A^*).$$

Demonstração : Ver [8]. ■

Lema 3.2.5. *Assuma que $Q : H \rightarrow H$ é linear e $\|Q\| \leq 1$. Então H pode ser decomposto em dois subespaços ortogonais,*

$$H = \mathcal{N}(1 - Q) \oplus \overline{\text{Im}(1 - Q)}$$

Demonstração : Como a decomposição da proposição anterior é válida para todos os operadores lineares contínuos, não apenas para os compactos, é suficiente mostrar que $\mathcal{N}(1 - Q) = \mathcal{N}(1 - Q^*)$. Assumamos que $Q f = f$. Então,

$$\begin{aligned} \|f - Q^* f\|^2 &= \|f\|^2 - 2\langle f, Q^* f \rangle + \|Q^* f\|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2\langle Q f, f \rangle + \|Q^* f\|^2 \\ &= -\|f\|^2 + \|Q^* f\|^2 \leq -\|f\|^2 + \|f\|^2 = 0, \end{aligned}$$

implicando em $f = Q^*f$. A inclusão inversa, $\mathcal{N}(1 - Q^*) \subset \mathcal{N}(1 - Q)$, segue de forma análoga. ■

Agora estamos prontos para provar o teorema 3.2.1.

Demonstração : Como vimos, é suficiente mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q^k f = \mathfrak{Q}f$$

Como $\|Q\| \leq 1$, podemos utilizar a decomposição do último lema. Para qualquer $f \in H$ é válido, pelo lema 3.2.3, $\mathfrak{Q}f \in \mathcal{N}(1 - \mathfrak{Q}) = \mathcal{N}(1 - Q)$, então

$$f = \mathfrak{Q}f + (1 - \mathfrak{Q})f \in \mathcal{N}(1 - Q) \oplus \overline{Im(1 - Q)},$$

e, além disso,

$$Q^k f = \mathfrak{Q}f + Q^k z, z = (1 - \mathfrak{Q})f \in \overline{Im(1 - Q)}.$$

Consequentemente, devemos mostrar que $Q^k z \rightarrow 0$ para cada $z \in \overline{Im(1 - Q)}$. Primeiro, assumamos que $z \in \overline{Im(1 - Q)}$, ou $z = (1 - Q)y$ para algum $y \in H$. Considere a sequência $c_k = \|Q^k y\|$. Esta sequência é decrescente e positiva. Seja $c = \lim c_k$. Se $c = 0$, então

$$Q^k z = Q^k y - Q^{k+1}y \rightarrow 0,$$

como queríamos. Agora, assumamos que $c > 0$, e defina a sequência

$$y_k = \frac{Q^k y}{c_k},$$

com as seguintes propriedades

$$\|y_k\| = 1, \lim_{k \rightarrow \infty} \|Q y_k\| = 0.$$

Pelo lema 3.2.2, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - Q)y_k = 0$, ou

$$Q^k z = Q^k y - Q^{k+1}y = c_k(1 - Q)y_k \rightarrow 0.$$

Este resultado pode ser estendido para o fecho de $Im(1 - Q)$. Se $z \in \overline{Im(1 - Q)}$, escolhamos $z_0 \in Im(1 - Q)$ com $\|z - z_0\| < \epsilon$, para $\epsilon > 0$ qualquer. Então

$$\|Q^k z\| \leq \|Q^k(z - z_0)\| + \|Q^k z_0\| < \epsilon + \|Q^k z_0\| \rightarrow \epsilon,$$

isto é, devemos ter $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q^k z\| = 0$. Isto completa a demonstração. ■

3.3 Retroprojeção Filtrada (FBP)

O método mais usado em reconstrução de imagens na tomografia computadorizada é o FBP. O método consiste em dois passos: filtrar os dados e utilizar retroprojeção (BP). Este último pode ser visto como o adjunto da projeção. Em vez de projetar valores de densidade para valores de projeção, um valor de projeção é retroprojetado ao longo dos pontos da imagem.

Antes de mais nada, é preciso introduzir o operador de retroprojeção.

Definição 3.3.1 (Operador de Retroprojeção).

$$(\mathcal{R}^*g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) d\theta, g \in S(C^n). \quad (3.13)$$

Então, para $g = \mathcal{R}f$, $(\mathcal{R}^*g)(x)$ representa a média de todas as integrações sobre hiperplanos de f através de x . Matematicamente falando, \mathcal{R}^* é o adjunto de \mathcal{R} . Várias propriedades deste operador podem ser encontradas em [12]

Teorema 3.3.2. *Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$ e $g = \mathcal{R}f$. Então*

$$f = c_n \begin{cases} \mathcal{R}^* \mathcal{H} g^{n-1} & \text{se } n \text{ é par,} \\ \mathcal{R}^* g^{n-1} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

$$c_n = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} & \text{se } n \text{ é par,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração : Ver [12]

O FBP pode ser visto como uma implementação numérica da fórmula de inversão 3.3.2 da transformada de Radon. Contudo é mais fácil começar a partir da definição 3.3.1. Seja $g = \mathcal{R}f$ e $V = \mathcal{R}^*v$, então

$$V * f = \mathcal{R}^*(v * g) \quad (3.14)$$

A ideia é escolher V como uma aproximação da função δ -Dirac e determinar v a partir de $V = \mathcal{R}^*v$. Então $V * F$ é uma aproximação de f que por ser calculada a partir da convolução ("filtragem") dos dados g por v , seguido por uma retroprojeção dos dados filtrados. Isso explica o nome do método.

Várias considerações podem ser feitas sobre V e cada uma delas leva a um resultado diferente. Vamos nos reter a esta breve descrição do FBP. Para mais informações consultar [12].

3.4 Decomposição em Valores Singulares (SVD)

O SVD é um método bastante conhecido onde uma matriz $A_{M \times N}$, com $M \geq N$, é reescrita como o produto de três matrizes, $A = U\Sigma V^T$. U e V são matrizes ortonormais e Σ é uma matriz diagonal cujas entradas são os valores singulares, σ_j . De um ponto de vista de transformações geométrica, o SVD é uma combinação de rotações e reflexões que não modificam o tamanho do vetor que está sendo multiplicado.

Um dos motivos pelo qual o SVD é usado numericamente deve-se ao fato da multiplicação por matrizes ortonormais ser uma operação inversível e extremamente estável (número de condição 1). Além disso, todo o mal-condicionamento do sistema fica restrito a matriz Σ .

Para a resolução da equação (3.4) por este método, primeiro é necessário definir a pseudo-inversa, ou inversa de *Moore-Penrose*.

Definição 3.4.1 (Matriz Pseudo-Inversa). *Seja A uma matriz $M \times N$ com colunas linearmente independentes. Designa-se por matriz pseudo-inversa de A a matriz $M \times N$*

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T \quad (3.15)$$

A pseudo-inversa de qualquer matriz A (mesmo $A^T A$ não sendo invertível) pode ser calculada a partir da decomposição em valores singulares (SVD). Além disso, esta matriz satisfaz as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= A \\ A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger \\ (AA^\dagger)^T &= AA^\dagger \\ (A^\dagger A)^T &= A^\dagger A \end{aligned}$$

Fazendo a decomposição em valores singulares da matriz A do sistema (3.4), obtemos

$$A = U\Sigma V^T = U(\text{diag}(\sigma_j))V^T \quad (3.16)$$

E, pelas propriedades da pseudo-inversa

$$A^\dagger = V\Sigma U^T = V \left(\text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_j} \right) \right) U^T$$

Portanto, a solução do sistema (3.4) pode ser obtida por

$$\begin{pmatrix} \tilde{f} \end{pmatrix} = (V) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_N} \end{pmatrix} (U^T) (p) \quad (3.17)$$

O exemplo a seguir mostra quão severo o mal condicionamento de um sistema pode ser,[10].

Exemplo 3.4.2 (Mal Condicionamento). *Considere o sistema*

$$0,835x + 0,667y = 0,168,$$

$$0,333x + 0,266y = 0,067,$$

onde a solução é

$$x = 1 \quad e \quad y = -1.$$

Se $b_2 = 0,067$ sofre uma leve perturbação e se torna $\hat{b}_2 = 0,066$, então a solução do novo sistema é

$$\hat{x} = -666 \quad e \quad \hat{y} = 834.$$

Isso pode ser explicado analisando o número de condição da matriz dos coeficientes. Se

$$A = \begin{pmatrix} 0,835 & 0,667 \\ 0,333 & 0,266 \end{pmatrix} \quad e \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -266000 & 667000 \\ 333000 & -835000 \end{pmatrix}$$

então o número de condição de A é

$$k = \|A\| \|A^{-1}\| = (1,502)(1168000) = 1754336 \approx 1,7 * 10^6,$$

onde foi utilizado a norma do máximo (maior soma entre as linhas da matriz). Como k é na ordem de 10^6 , a possibilidade de erro na solução pode ser cerca de 1 milhão de vezes maior que o erro em A . Portanto, a matriz A e o sistema associado a ela são mal condicionados.

É fácil visualizar o que causa o mal condicionamento de um sistema 2×2 . Geometricamente, duas equações com duas incógnitas representam duas retas, e a solução do sistema é o ponto de intersecção entre as retas. Um problema mal condicionado representa duas retas quase que paralelas.

Se duas retas são quase paralelas e uma delas sofre uma leve perturbação, então o ponto de intersecção é alterado drasticamente (ver 3.4).

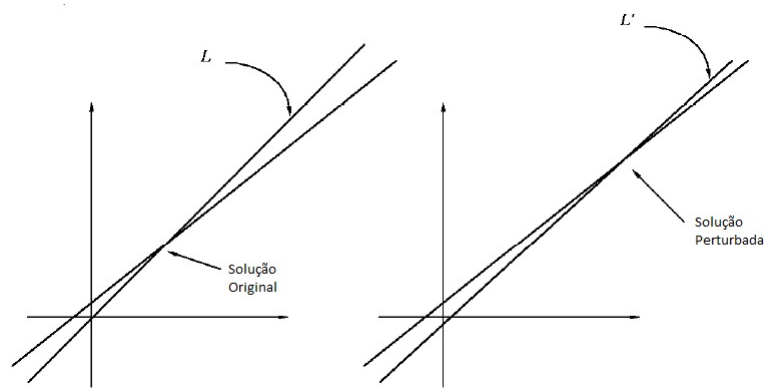


Figura 3.4: Exemplo de mal condicionamento num sistema 2×2 .

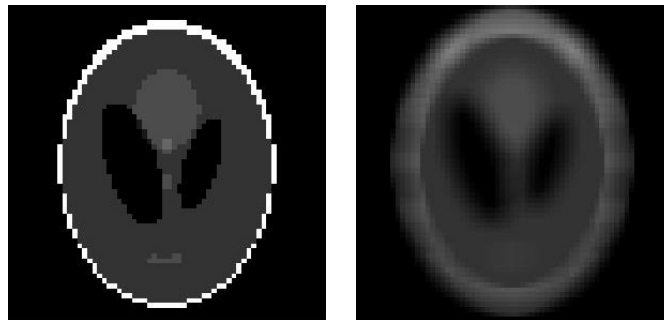
A figura 3.4 mostra a reta L que é levemente perturbada para se tornar a reta L' . Note como essa pequena perturbação muda completamente o ponto de intersecção. Isso é exatamente o que acontece no exemplo que acabamos de mostrar.

4 Resultados Numéricos

Após a formalização de alguns métodos para a reconstrução de imagens, feita no capítulo anterior, vamos agora mostrar resultados numéricos obtidos com cada um deles.

Os resultados a ser apresentados foram obtidos utilizando o software Matlab©, programa para o desenvolvimento de algoritmos, análise de dados, computação numérica, dentre outros.

As reconstruções foram feitas com base na figura “Phantom” - disponível no Matlab para testar a eficiência de métodos de reconstrução de imagens-, com 64×64 pixels, que pode ser vista na figura 4.1. Junto dela temos a figura “Phantom com ruído”, que consiste da implementação de ruído gaussiano na figura Phantom. O ruído é implementado para simular os efeitos de espalhamento e erro dos aparelhos de medição no processo de tomografia computadorizada.



(a) Phantom.

(b) Phantom com ruído.

Figura 4.1: Phantom com e sem ruído.

4.1 Implementação

Apresentamos nesta seção implementações dos métodos estudados no capítulo 3. Além disso, verificamos estas implementações para a reconstrução de imagens e fazemos um simples teste de eficácia.

4.1.1 Técnica de Reconstrução Algébrica

A Técnica de Reconstrução Algébrica (ART) busca a solução pela projeção sequencial a partir de uma estimativa inicial, no conjunto de soluções das equações lineares, onde cada um desses conjuntos é um hiperplano, como foi apresentado na seção 3.2. Nosso algoritmo funciona da seguinte forma:

1. Recebe-se uma imagem;
2. Monta-se a matriz A , seguindo a equação (3.2);
3. Inicia-se o processo iterativo de projeções, de acordo com a equação (3.6).

A seguir apresentamos uma sequência de imagens geradas no decorrer do processo de reconstrução pelo ART.

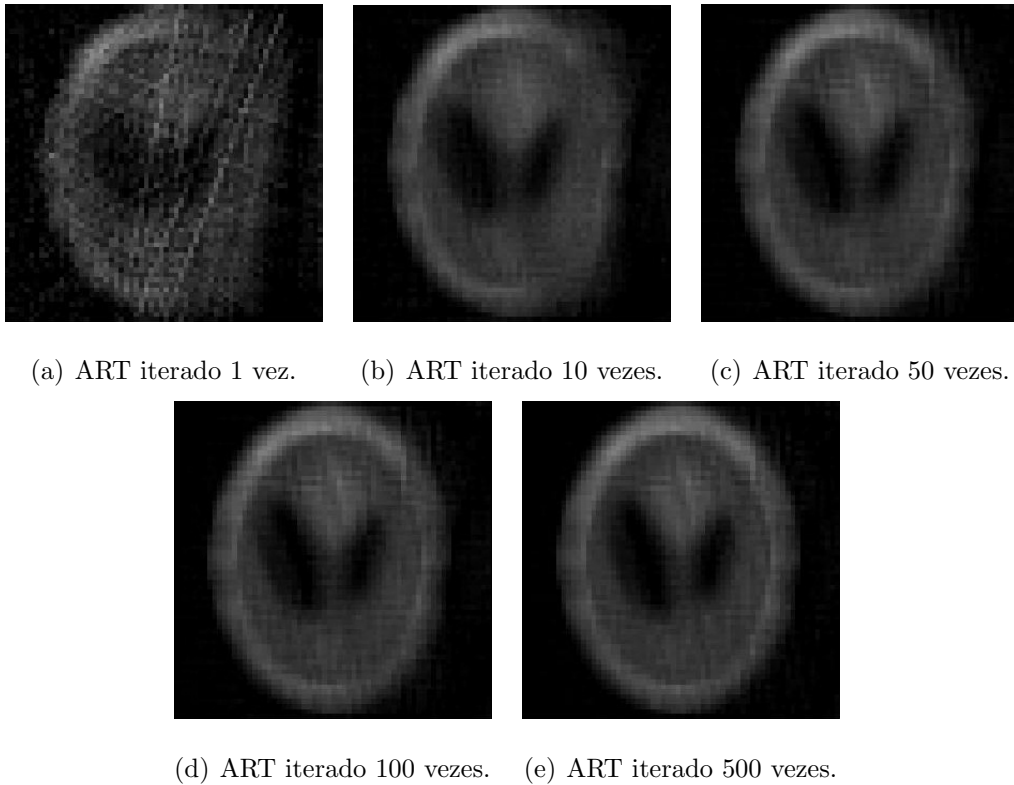


Figura 4.2: Reconstruções usando ART em diferentes momentos do processo.

4.1.2 Retroprojeção Filtrada

O método de Retroprojeção Filtrada (FBP) é o mais utilizado em reconstrução de imagens na tomografia computadorizada. O método consiste em dois passos: filtrar os dados e

utilizar retroprojeção (BP). Ver seção 3.3.

Utilizamos as funções *radon* e *iradon*, do Matlab, na reconstrução de imagens pelo método FBP. O algoritmo que gera as imagens funciona da seguinte forma:

1. Recebe-se uma imagem;
2. Aplica-se, na imagem, a função *radon*, a qual faz projeções sequências;
3. Com o resultado do último passo, aplica-se a função *iradon*, que é o método FBP em si.

A reconstrução obtida com este algoritmo, para a imagem Phantom, pode ser vista a seguir.

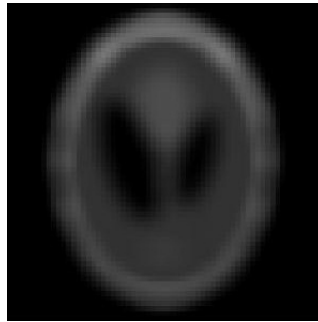


Figura 4.3: Reconstrução obtida com o FBP.

4.1.3 Decomposição em Valores Singulares

O método de Decomposição em Valores Singulares (SVD) é bastante conhecido. Nele, uma matriz $A_{M \times N}$, com $M \geq N$, é reescrita como o produto de três matrizes, $A = U\Sigma V^T$. Ver seção 3.4.

Na reconstrução de imagens pelo SVD, usamos a função *svd* disponível no software Matlab. Os seguintes passos são necessários para gerar imagens por este método:

1. Recebe-se uma imagem;
2. Utiliza-se a função *svd* para efetuar a decomposição em valores singulares;
3. É feita a reconstrução da imagem de acordo com a equação (3.17)

Abaixo apresentamos a reconstrução da imagem Phantom com o SVD.

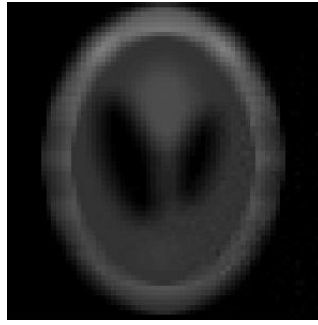


Figura 4.4: Reconstrução obtida com o SVD.

4.2 Análise dos Resultados

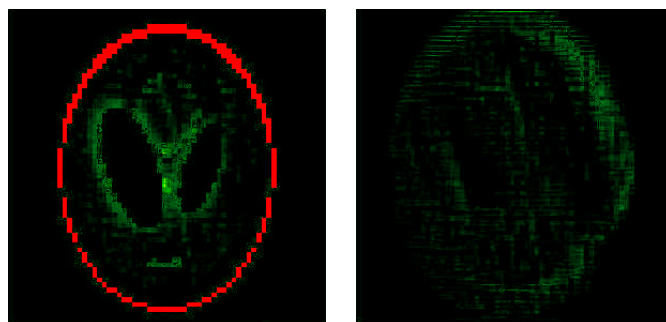
Esta seção tem a finalidade de analisar, de forma simples, a eficiência das implementações feitas na seção anterior. Para isso, fazemos comparações entre as imagens reconstruídas por cada método com as imagens Phantom e Phantom com ruído.

Essa comparação é feita calculando a diferença entre as imagens original (Phantom) e original após implementação de ruído (Phantom com ruído) e as imagens reconstruídas por cada método. Com o objetivo de facilitar a visualização destas diferenças entre imagens, aplicamos um filtro de calor que destaca os pixels onde as imagens diferem.

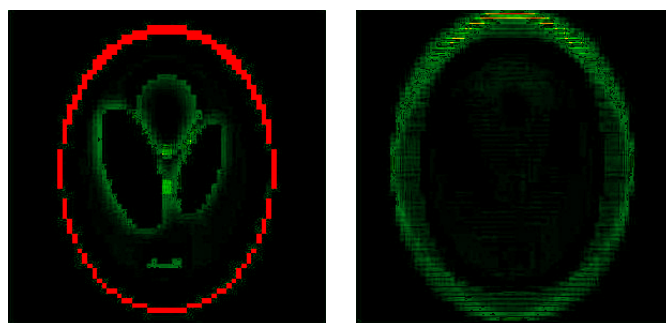
Os resultados destas diferenças, para cada método, são apresentados na figura 4.5.

Podemos observar, pela figura 4.5, que os três métodos fazem reconstruções que se aproximam razoavelmente da imagem pretendida (Phantom).

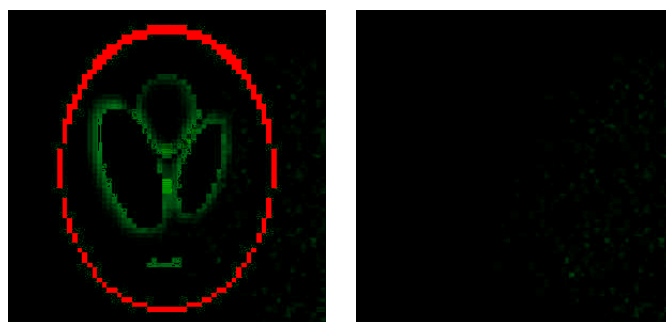
Vale ressaltar que, na prática, o método FBP é o mais difundido, pois tem um custo computacional baixo e gera, na grande maioria dos casos, imagens razoáveis para análise qualitativa. Já o ART produz, em geral, imagens com qualidade superior ao FBP. Porém, seu custo computacional é bastante elevado. O método SVD não é muito usado na reconstruções de imagens devido ao mal condicionamento do problema (seção 2.5 e exemplo 3.4.2).



(a) Diferença entre Phantom e ART. (b) Diferença entre Phantom com ruído e ART.



(c) Diferença entre Phantom e FBP. (d) Diferença entre Phantom com ruído e FBP.



(e) Diferença entre Phantom e SVD. (f) Diferença entre Phantom com ruído e SVD.

Figura 4.5:

Referências Bibliográficas

- [1] A. Sá Barreto, *Introdução às transformadas de radon*, Symposium on Spectral and Scattering Theory, 2003, online: <http://www.math.purdue.edu/sabarre/Papers/radon1.pdf>.
- [2] Robert G. Bartle, *The elements of integration and lebesgue measure*, Wiley-Interscience, 1995.
- [3] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, Wiley, 2008.
- [4] Thorsten M. Buzug, *Computed tomography: From photon statistics to modern cone-beam ct*, Springer, 2008.
- [5] Antonio Carlos Pires Carvalho, *História da tomografia computadorizada*, 2007, online: <http://www.sociedadeclementeferreira.org.br/images/Historia-da-Tomografia-Computadorizada.pdf>.
- [6] A. De Cezaro and F. Travessini De Cezaro, *Problemas inversos e a matemática da tomografia computadorizada*, 2010, Mini-Curso apresentado na V Bienal da SBM.
- [7] D. H. Fremlin, *Measure theory: Broad foundations (measure theory)*, Torres Fremlin, 2001.
- [8] Jari Kaipio and E. Somersalo, *Statistical and computational inverse problems (applied mathematical sciences) (v. 160)*, Springer, 2004.
- [9] Andrew Markoe, *Analytic tomography (encyclopedia of mathematics and its applications)*, Cambridge University Press, 2006.
- [10] C. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.
- [11] Frank Natterer, *The mathematics of computerized tomography (classics in applied mathematics)*, SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

- [12] Frank Natterer and Frank Wübbeling, *Mathematical methods in image reconstruction (monographs on mathematical modeling and computation)*, SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [13] Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions. (pms-30)*, Princeton University Press, 1971.
- [14] Elias M. Stein and Guido Weiss, *Introduction to fourier analysis on euclidean spaces. (pms-32)*, Princeton University Press, 1971.
- [15] Daniel W. Stroock, *A concise introduction to the theory of integration*, Birkhauser, 1994.
- [16] Wikipedia, *Tomografia computadorizada*, http://pt.wikipedia.org/wiki/Tomografia_computadorizada.